1. TIPOS DE NÚMEROS

Se sabe que desde tiempos muy remotos los humanos hemos usado los números con fines prácticos, como saber cuántos individuos formaban parte de un clan, cuántos volvían vivos de cazar el mamut, cuántos días quedaban para que hubiera luna llena, cómo preparar una receta o construir una casa.
Quizá empezaron a contar con los dedos de las manos (que casualmente son diez, como en el actual sistema de numeración, que utiliza diez símbolos o dígitos). Posiblemente las primeras representaciones numéricas fueran palotes trazados en el suelo, aunque posteriormente se utilizaron otras, como los números romanos o los arábigos que utilizamos en la actualidad.
Lo cierto es que, según las necesidades, fue necesario inventar diferentes tipos de números.

1.1. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS, RACIONALES Y REALES

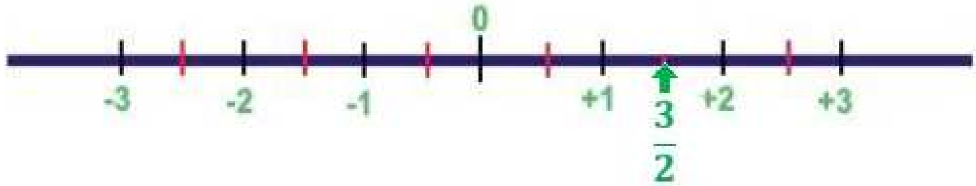
Todos los números que usamos habitualmente son los llamados **números reales ($\mathbb{R}$)**, que pueden ser:

- **Números naturales ($\mathbb{N}$)**: son los números más sencillos y sirven para contar días o personas.
  Ejemplos: $0, 1, 5, 8.$
- **Números enteros ($\mathbb{Z}$)**: permiten contar deudas. Están formados por los enteros negativos, el cero y los enteros positivos.
  Ejemplos: $-8, -2,\ 0, +1, +5.$
- **Números racionales o fracciones ($\mathbb{Q}$)**: son divisiones no realizadas que permiten representar las partes de un todo.
  Ejemplos: $-\frac{5}{4},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{0}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{5}{4}$
- **Números decimales**: son una forma de representar fracciones cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.
  Ejemplos: $2{,}4 = \frac{24}{10}\quad ; -6{,}75 = -\frac{675}{100}$
- **Números irracionales**: se pueden escribir como decimales con infinitas cifras que no se repiten.
  Ejemplos: $\pi = 3{,}1415\ldots\quad ;\quad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots..$

1.2. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES E INTERVALOS NUMÉRICOS

Todos los números reales se pueden representar sobre una recta, de forma que cada uno va asociado a uno de los infinitos puntos que forman la recta. Para hacerlo, se elige un punto para situar al cero, y a la derecha e izquierda de éste se hacen marcas a la misma distancia entre sí, asociando a los números enteros positivos las marcas a la derecha del cero, y las de la izquierda del cero a los enteros negativos.

Para representar las fracciones puede dividirse cada marca de la recta en tantas partes como indique el denominador y tomar las que indica el numerador (situadas a la derecha del cero si la fracción es positiva y a la izquierda si es negativa).



Otra opción es dividir el numerador entre el denominador para obtener el número decimal equivalente a la fracción y representarlo sobre la recta, teniendo en cuenta que en realidad es una fracción cuyo denominador es la unidad seguida de ceros. Para ello, a partir de las marcas realizadas para representar números enteros, se localiza la correspondiente a la de la parte entera del mismo y luego se divide la siguiente unidad en diez partes (igual que en una regla) para situar la primera cifra decimal; después habría que volver a dividir en otras diez partes el espacio entre esta marca y la siguiente para poder encontrar la correspondiente a la segunda cifra decimal, y así sucesivamente hasta encontrar la posición del número. En la práctica, al representar sobre papel no se puede dividir cada unidad en más de 10 partes, por lo que la representación se hace de forma aproximada.
Este mismo procedimiento también puede usarse para representar números irracionales (con infinitas cifras decimales).

Tras lo expuesto, se comprenderá porqué entre dos puntos de la recta de los números reales siempre se pueden encontrar infinitos puntos correspondientes a los números intermedios situados entre ellos. Por ello, para referirse a todos los números asociados a una porción de la recta de los números reales se usan los **intervalos numéricos**, que se representan escribiendo entre corchetes o paréntesis, y separados por una coma (o punto y coma si son decimales) los dos números que hacen de extremos. A la izquierda va el número más pequeño y a la derecha el más grande.
Ejemplo: para referirnos a los números comprendidos entre el -1 y el 5, se pueden escribir estos intervalos numéricos:

- $[\mathbf{-1,5}]$:números comprendidos entre -1 y 5, incluyendo el -1 y el 5.
- $(\mathbf{-1,5})$:números comprendidos entre -1 y 5, sin incluir ni el -1 ni el 5.
- $[\mathbf{-1,5})$:números comprendidos entre -1 y 5, incluyendo el -1 pero no el 5.
- $(\mathbf{-1,5}]$:números comprendidos entre -1 y 5, sin incluir el -1 pero sí el 5.

Con símbolos matemáticos, lo anterior se puede escribir así:

- $[\mathbf{-1,5}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{-1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5}\}$: intervalo cerrado por la izquierda y por la derecha.
- $(\mathbf{-1,5}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{-1} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5}\}$: intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.
- $[\mathbf{-1,5}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{-1} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{5}\}$: intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.
- $(\mathbf{-1,5}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{-1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{5}\}$: intervalo abierto por la izquierda y por la derecha.

2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

Hay muchos números naturales que se pueden escribir como producto de otros números naturales (los **números compuestos**, como $6 = 2 \times 3$). Sin embargo, con otros no se puede hacer esto, porque sólo se pueden dividir entre ellos mismos y el uno (los **números primos**, como el 2, el 7 o el 11).
Los **criterios de divisibilidad** son reglas prácticas que permiten saber si un número se puede dividir por otro sin necesidad de realizar la división. Las más conocidas son las de los números primos más pequeños:

- **Regla del 2:** los números pares.

- **Regla del 3:** números en los que al sumar todas sus cifras resulta un número divisible entre tres.
  Ejemplo: $471 \rightarrow 4 + 5 + 1 = \mathbf{12}$ como $12{:}\,3 = 4$, entonces 471 es divisible por 3

$$\begin{array}{r|l} 471 & \underline{\mathbf{3}\quad} \\ 17 & 157 \\ 21 & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

- **Regla del 5:** números acabados en 0 o 5.

- **Regla del 7:** números en los que el resultado de restar el doble de la cifra de las unidades al número que queda al eliminar esta cifra, es cero o divisible entre 7 (para números grandes será necesario repetir la operación varias veces).
  Ejemplo: $203 \rightarrow 20 - 2 \times 3 = \mathbf{14}$ como $14{:}\,7 = 2$, entonces 203 es divisible por 7:

$$\begin{array}{r|l} 203 & \underline{\mathbf{7}\quad} \\ 63 & 29 \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

- **Regla del 11:** números en los que la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan posiciones pares, y la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es cero o múltiplo de 11.
  Ejemplo: $4356 \rightarrow (6 + 3) - (4 + 5) = 9 - 9 = \mathbf{0}$, por lo que 4356 es divisible por 11:

$$\begin{array}{r|l} 4356 & \underline{\mathbf{11}\quad} \\ 105 & 396 \\ 066 & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

Para otros números primos no hay reglas de divisibilidad sencillas, por lo que si se quiere saber si un número es divisible por alguno de ellos, no queda más remedio que hacer la división para ver si sale exacta.
Conviene conocer también algunos **criterios de divisibilidad de números que no son primos** porque en muchas ocasiones ayudan a hacer cálculos más rápidamente:

- **Regla del 4:** basta con que las dos últimas cifras sean un número divisible por 4.
  Ejemplo: $712 \rightarrow$ como el 12 es divisible por 4, entonces también lo es el 712:

$$\begin{array}{r|l} 712 & \underline{\mathbf{4}\quad} \\ 31 & 178 \\ 32 & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

- **Regla del 6:** los números divisibles por 2 y por 3 (pares en los que la suma de sus cifras es divisible por 3).
  Ejemplo: $852 \rightarrow 8+5+2=15$ como el 15 es divisible por 3, y 852 es par, este número es divisible por 6:
  $$\begin{array}{r|l} 852 & \underline{\mathbf{6}\quad} \\ 25 & 142 \\ 12 & \\ 0 & \end{array}$$

- **Regla del 9:** números en los que la suma de sus cifras es divisible por 9.
  Ejemplo: $486 \rightarrow 4+8+6=18$ como el $18:9=2$ entonces 486 es divisible por 9:
  $$\begin{array}{r|l} 486 & \underline{\mathbf{9}\quad} \\ 36 & 54 \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

- **Regla del 10:** los números divisibles por 2 y por 5 (los acabados en cero).
  Ejemplo: $270 \rightarrow$ es par y divisible por 5, por lo que se puede dividir por 10:
  $(270:10=27)$

Para demostrar si un número es primo, basta con aplicarle las reglas de divisibilidad de los números primos; si no cumple ninguna de ellas, hay que probar con los siguientes números primos $(13, 17, 23, \ldots)$ haciendo la división (porque no tienen regla de divisibilidad). Si con uno de ellos, el cociente es menor que el divisor con el que se prueba y la división no es exacta, entonces el número es primo.
Ejemplo: 127: no es divisible por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7 y ni por 11 porque incumple las reglas de éstos. Al intentar dividirlo por 13 el resultado es:
$$\begin{array}{r|l} 127 & \underline{13\quad} \\ 10 & \mathbf{9} \end{array}$$
Por tanto, el 127 es un número primo porque la división por 13 no es exacta y $9 < 13$.

3. LAS POTENCIAS Y SUS PROPIEDADES

La **potencia de exponente natural** de un número, llamado **base**, es la multiplicación de este número por sí mismo tantas veces como indica el **exponente** de la potencia:

$$\boldsymbol{a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ veces}}$$

Ejemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

En el ejemplo, la base (el 2), el exponente (el 3) y la potencia (el 8, es decir el resultado de la operación) son **números naturales**, pero esta forma de representar multiplicaciones repetidas **se puede aplicar cuando la base es cualquier tipo de número real**, ya que así se facilitan este tipo de operaciones, tal como veremos más adelante.

Por otro lado, a partir de la definición anterior de potencia de exponente natural, se pueden deducir una serie de **propiedades de las potencias** que permiten aplicar el concepto a potencias de **exponente entero negativo y también fraccionario** (como las raíces cuadradas).

A continuación se resumen estas **propiedades de las potencias**, cada una con un ejemplo sencillo con números naturales, pero todas ellas son **aplicables a cualquier tipo de número real** (con las limitaciones que puedan suponer las reglas de la multiplicación o división de éstos):

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Descripción	Propiedad	Ejemplo
Definición de potencia de exponente natural	$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ veces}$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Producto de potencias de igual base	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$2^5 \cdot 2^2 = 2^7$
Cociente de potencias de igual base	$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$2^5 : 2^2 = 2^3$
Potencia de una potencia	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$(2^5)^2 = 2^{10}$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$
Potencia de un cociente	$(a : b)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
Potencia de exponente negativo	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
Potencia de exponente negativo y base fraccionaria	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
Potencia de exponente cero	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$
Potencia de base negativa	$(-a)^n = -a^n$ **n** impar	$(-2)^3 = -2^3 = -8$
	$(-a)^n = a^n$ **n** par	$(-2)^4 = 2^4 = 16$

3.1. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL Y CÁLCULO DE MCM Y MCD

La **descomposición factorial de un número como producto de factores primos** se hace aplicándole las reglas de divisibilidad por los números primos (preferentemente empezando por los más pequeños), dividiendo por el que sea posible y repitiendo el proceso con el cociente obtenido hasta que el cociente sea 1. Ejemplos:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{240} & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{1485} & 3 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11}$$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{126} & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

La descomposición en producto de factores primos de un número también se puede hacer escribiéndolo como producto de números más pequeños (no necesariamente primos) y descomponiendo éstos en productos de factores primos; luego hay que aplicar las reglas de las potencias agrupando factores primos.

Ejemplo: $\mathbf{240} = 24 \times 10 = (3 \times 8) \times (2 \times 5) = 3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 5}$
Una de las aplicaciones de esta descomposición es la obtención del **mínimo común múltiplo** y del **máximo común divisor** de varios números.

El **mínimo común múltiplo de varios números (mcm)** es el múltiplo más pequeño que comparten estos números. Se puede calcular escribiendo ordenadamente los múltiplos de cada uno de ellos y buscando en cuál de ellos coinciden en primer lugar.
Ejemplo: mcm$(12\ y\ 15)$:

		Múltiplos
12	$\rightarrow$	$12, 24, 36, 48, \mathbf{60}, 72, 84, \ldots$
15	$\rightarrow$	$15, 30, 45, \mathbf{60}, 75, 90, \ldots$

Por tanto mcm$(12\ y\ 15) = 60$

El **máximo común divisor (mcd)** de varios números es el divisor más grande que comparten estos números. Se puede calcular escribiendo ordenadamente todos los divisores que tiene cada uno de los números y buscando el mayor en el que coinciden: Cuando el máximo divisor común es el 1, se dice que los números son ***primos entre sí***.
Ejemplo: mcd$(12\ y\ 15)$:

		Divisores
12	$\rightarrow$	$1, 2, \mathbf{3}, 4, 6\ 12$
15	$\rightarrow$	$1, \mathbf{3}, 5, 15$

Por tanto mcd$(12\ y\ 15) = 3$

Con números pequeños, el mcm o el mcd pueden obtenerse de la forma indicada aplicando las tablas de multiplicar y los criterios de divisibilidad, pero para números grandes esto sería ya más complicado. Afortunadamente, con la descomposición factorial de los números en producto de factores primos se obtienen así:

- **mcm:** producto de los factores primos no comunes y de los comunes con mayor exponente.
- **mcd:** producto de los factores primos comunes con menor exponente.

Ejemplo: mcm y mcd de 36 y 54:

	mcm	mcd
$36 = 4 \cdot 9 = \mathbf{2^2 \cdot 3^2}$ $60 = 6 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3 \cdot \mathbf{5}$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$	$2^2 \cdot 3 = 12$
	mcm$(\mathbf{36\ y\ 60}) = \mathbf{180}$	**mcd**$(\mathbf{36\ y\ 60}) = \mathbf{12}$

Cuando varios números no comparten ninguno de los criterios de divisibilidad y en su descomposición factorial no coinciden en ninguno de los factores, se dice que son ***primos entre sí*** y como consecuencia:

- Su mcm es el producto de los números.
- Su mcd es el 1.

Ejemplo: los números 14 y 15 son primos entre sí ($14 = 2 \cdot 7$ y $15 = 3 \cdot 5$), por lo que:
mcm$(14\ y\ 15) = 14 \cdot 15 = 210$ y mcd$(14\ y\ 15) = 1$

Para recordar mejor la forma de obtener el mcm y el mcd, fíjate en que el mínimo común múltiplo **(mcm) siempre *intenta ser grande*** porque nunca puede ser más pequeño que los números a los que corresponde, mientras que el máximo común divisor **(mcd) siempre *quiere ser pequeño*** porque nunca puede ser más grande que el mayor.

3.2. LAS POTENCIAS DE BASE DIEZ

Teniendo en cuenta las reglas de la multiplicación por la unidad seguida de ceros, algunas equivalencias entre potencias de base 10 y su forma decimal son:

$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0{,}01$
$10^3 = 1\ 000$	$10^{-3} = 0{,}001$
$10^6 = 1\ 000\ 000$	$10^{-6} = 0{,}000001$
$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$	$10^{-9} = 0{,}000000001$
$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$	$10^{-12} = 0{,}000000000001$

En las potencias de 10 el exponente indica:

- **Si es positivo: los ceros que hay a la derecha del uno.**
- **Si es negativo: el puesto que ocupa el uno a la derecha de la coma.**

3.3. LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

Es una forma de escribir los números como el producto de un número llamado **mantisa** (entero o decimal mayor o igual que 1, pero menor que 10) y una potencia de 10. Aunque sirve para cualquier tipo de número, es particularmente recomendable para números muy grandes o muy pequeños.
Ejemplos:

$$348.700.000 = 3{,}487 \cdot 10^8 \qquad 0{,}0000625 = 6{,}25 \cdot 10^{-5}$$

Cambio de decimal a notación científica

La mantisa siempre comienza con la primera cifra distinta de cero de la forma decimal, seguida de una coma y el resto de dígitos del número (por supuesto, sin más comas). El exponente de 10 se obtiene aplicando al número el mismo criterio general que el utilizado para las potencias de 10:

- Números cuyo valor absoluto es mayor que uno: exponente de 10 positivo, que indica las posiciones que hay hasta la coma, a la derecha de la primera cifra.
  Ejemplos:

$$\mathbf{2.340.000 = 2,34 \times 10^6}$$

$$\mathbf{-732,5051 = -7,325051 \cdot 10^2}$$

- Números cuyo valor absoluto es menor que uno: exponente de 10 negativo, que indica las posiciones entre la coma y la primera cifra distinta de cero.
  Ejemplos:

$$\mathbf{0,0000025 = 2,5 \times 10^{-6}}$$

$$\mathbf{-0,005612 = -5,612 \cdot 10^{-3}}$$

Cambio de notación científica a decimal

- Exponente de 10 positivo: se corre a la derecha la coma de la mantisa tantas posiciones como indique el exponente, añadiendo ceros si es preciso.
  Ejemplo: $\mathbf{8,493 \cdot 10^5 = 849.300}$
- Exponente de 10 negativo: se corre la coma a la izquierda de la mantisa tantas posiciones como indique el exponente, añadiendo ceros si es preciso.
  Ejemplo: $\mathbf{7,21 \cdot 10^{-4} = 0,000721}$

4. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Con todos los números reales se pueden hacer operaciones como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, que ya conocerás. Todas estas operaciones se definen para dos números (podríamos decir que son operaciones 'binarias'). Por eso, por ejemplo, cuando queremos hacer $2+3+7$, decimos "dos y tres cinco, y cuatro, nueve"; por supuesto, todos lo sabemos hacer, pero fíjate en que has hecho dos sumas, y en cada una de ellas sólo juntas dos números, ¡no tres!

Las siguientes propiedades te ayudarán a realizar más fácilmente operaciones de cierta complejidad (el nombre de la propiedad es lo de menos; fíjate en los ejemplos):

	SUMA		MULTIPLICACIÓN	
	Propiedad	**Ejemplo**	**Propiedad**	**Ejemplo**
Conmutativa	$\boldsymbol{a+b=b+a}$	3+2=2+3 5=5	$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$	3·2=2·3 6=6
Asociativa	$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c}$	5+(1+6)=(5+1)+6 5+7=6+6 12=12	$\boldsymbol{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c}$	2·(3·7)=(2·3)·7 2·21=6·7 42=42
Elemento neutro	$\boldsymbol{a+0=a}$	7+0=7	$\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$	7·1=7
Opuesto	$\boldsymbol{a+(-a)=0}$	3+(-3)=0 3-3=0	--------------------	---------------------
Inverso	------------------------	-----------------------	$\boldsymbol{a \cdot \frac{1}{a} = 1, (si\ a \neq 0)}$	$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 1}{5} = \frac{5}{5} = 1$
Distributiva	$\boldsymbol{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$			3·(2+7) = 3·2 + 3·7 3·9 = 6 + 21 27 = 27

Como consecuencia de que todos los números reales tienen **opuesto** y que, excepto el cero, todos tienen **inverso**, es posible hacer todas las restas y todas las divisiones (excepto entre cero) con dos números reales, ya que:

- ✓ La resta es lo mismo que sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Ejemplo: $5-7=5+(-7)=-2$
- ✓ El cociente es lo mismo que multiplicar el dividendo por el inverso del divisor. Ejemplo: $5:7=5 \cdot \frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

Otra consecuencia es la regla de las **operaciones combinadas**:

"Cuando hay varios números entre los que aparecen sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, tienen prioridad la multiplicación o división (ambas con igual prioridad y en el orden de aparición) y luego las sumas o restas. Cuando hay paréntesis o corchetes, dentro de ellos se sigue el mismo criterio pero teniendo en cuenta que del paréntesis o del corchete tiene que acabar saliendo como resultado un número al que se aplicará la regla de la prioridad con el resto de operaciones".

Ejemplos:

- $3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$
- $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 6 = 18$
- $8 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot (7 - 6 \cdot 3) = 8 - 12 + 2 \cdot (7 - 18) = -4 + 2 \cdot (-11) = -4 - 22 = -26$

Fíjate cómo en los dos primeros, con los mismos números y operaciones, el resultado es distinto si hay paréntesis.

Valor absoluto de un número:
Es el mismo número escrito sin signo, por lo que siempre es positivo. Para representarlo se escribe el número entre dos barras:

$|-5| = 5$, que se lee: "el valor absoluto de -5 es 5.
$|+8| = 8$, que se lee: "el valor absoluto de $+8$ es 8.

Suma de números reales:
Si tienen el mismo signo, el resultado es otro número real del mismo signo, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de ambos. Ejemplos:

$$+3 + (+5) = +8$$
$$-3 + (-5) = -8$$

Si tienen signos diferentes, el resultado es otro número real cuyo signo es el del que tenga mayor valor absoluto, y cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos: Ejemplos:

$$+3 + (-5) = -2$$
$$-3 + (+5) = +2$$

Regla de los signos en la multiplicación (o división) de números reales:

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned}$$

Fracciones equivalentes: son las que tienen diferentes el numerador y el denominador, pero representan la misma cantidad. Para obtener fracciones equivalentes a una dada, ésta se puede **amplificar** (multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número) o **simplificar** (dividir el numerador y el denominador por el mismo número).
Ejemplos:

- Amplificar: $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \mathbf{5}}{2 \cdot \mathbf{5}} = \frac{15}{10}$
- Simplificar: $\frac{27}{12} = \frac{27 : \mathbf{3}}{12 : \mathbf{3}} = \frac{9}{4}$

Suma y resta de fracciones: si tienen el mismo denominador, se suman (o restan) los numeradores y se deja el mismo denominador.
Ejemplo:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Cuando los denominadores no son iguales (que es lo normal), es necesario obtener fracciones equivalentes a las originales que sí tengan los denominadores iguales. Para ello, bastará amplificarlas buscando como denominador común un múltiplo que compartan los denominadores originales, pudiendo elegir uno de estos números:

a) **El producto de los denominadores originales**, para lo que cada numerador original debe multiplicarse por todos los denominadores menos el propio.

b) **El mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores originales**, para lo que habrá que multiplicar cada numerador original por el resultado de dividir el mcm entre el correspondiente denominador original.

Recuerda que el mcm de varios números es el múltiplo común más pequeño que comparten estos números (a partir de la descomposición de los números en producto de factores primos, se calcula como el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente).
La ventaja de la primera opción es que el primer paso de la suma de fracciones es muy rápido, pudiéndose aplicar este esquema general:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$$

Cuando los denominadores son primos entre sí (no comparten criterios de divisibilidad), esta opción resulta más rápida que calcular el mínimo común múltiplo, pero si los denominadores originales comparten criterios de divisibilidad, conduce a cifras más grandes que pueden ser la causa de cometer errores.

Ejemplo: $\frac{7}{2}+\frac{5}{6}$

Denominador común

a) Producto de los denominadores:	b) Mínimo común múltiplo:
$\frac{7}{2}+\frac{5}{6}=\frac{7\times 6+5\times 2}{2\times 6}=\frac{42+10}{12}=\mathbf{\frac{52}{12}}$	$\frac{7}{2}+\frac{5}{6}=\frac{7\times 3}{2\times 3}+\frac{5}{6}=\frac{21}{6}+\frac{5}{6}=\frac{21+5}{6}=\mathbf{\frac{26}{6}}$

En este ejemplo, es más conveniente utilizar como denominador común, el mínimo común múltiplo de 2 y 6 (que es 6) ya que se obtiene fácilmente y conduce a valores más pequeños. Como es lógico, los dos resultados obtenidos son equivalentes, ya que simplificándolos, conducen al mismo valor:

$$\mathbf{\frac{52}{12}}=\frac{52:2}{12:2}=\mathbf{\frac{26}{6}}=\frac{26:2}{6:2}=\frac{13}{3}$$

Producto de fracciones: se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí (en 'horizontal'): $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$ Ejemplo: $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$

División de fracciones: se multiplican numeradores y denominadores 'en cruz': $\boldsymbol{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$ Ejemplo: $\frac{3}{4}:\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28}$

5. PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Hay situaciones prácticas en las que dos o más propiedades están relacionadas entre sí, de forma que cuando varía una, también lo hace la otra.
Ejemplos:

- Entre los kilogramos de naranjas que se compran y los euros a pagar por ellos, hay una relación de proporcionalidad directa, ya que cuantos más kilogramos de naranjas se compran, más euros hay que pagar.
- Entre la velocidad a la que va un coche y el tiempo que tarda en recorrer cierta distancia, hay una relación de proporcionalidad inversa, ya que cuanta mayor sea la velocidad, menos tiempo se tardará en realizar el recorrido considerado.

En general, si $\boldsymbol{a, a'}$ son los valores de una **propiedad A** en dos situaciones diferentes, y $\boldsymbol{b, b'}$ los de otra **propiedad B** en esas dos situaciones, la información se puede recoger en una tabla de este modo:

	Propiedad A	propiedad B
Situación 1ª	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
Situación 2ª	$\boldsymbol{a'}$	$\boldsymbol{b'}$

Dependiendo del tipo de proporcionalidad entre las dos propiedades, la relación entre los valores de ambas se puede expresar así:

Proporcionalidad directa:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b'}}$$

Proporcionalidad inversa:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}} = \frac{\boldsymbol{b'}}{\boldsymbol{b}}$$

Esto quiere decir que la relación entre los valores de las propiedades en las dos situaciones se puede escribir como la igualdad entre dos fracciones equivalentes, lo que en los problemas concretos se puede usar para calcular uno de los cuatro números de las igualdades anteriores conociendo tres de ellos. La clave para resolverlo correctamente será saber distinguir el tipo de relación (directa o inversa) e identificar los datos del problema.

Veamos esto con dos ejemplos concretos:

- Ejemplo 1: Si por la compra de 5 kg de naranjas se han pagado 8 €, ¿cuántos kg de naranjas se podrán comprar con 20 €?
  Solución: lo primero es organizar los datos del problema:

	kilogramos de naranjas	Euros a pagar
Situación 1ª	$5\ kg$	8 €
Situación 2ª	x	20 €

Como entre los kilogramos de naranjas y los euros hay una proporcionalidad directa:

$$\frac{5}{x} = \frac{8}{20} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{5 \cdot 20}{8} = 12{,}5\ kg$$

- Ejemplo 2: Un tren que viaja a 80 km/h tarda 3 horas en llegar a una ciudad. ¿A qué velocidad debería ir para hacer este trayecto en 2,5 horas?
  Solución: lo primero es organizar los datos del problema:

	Velocidad del tren	Horas de viaje
Situación 1ª	$80\ km/h$	$3\ h$
Situación 2ª	x	$2{,}5\ h$

*Como entre la velocidad y las horas de viaje hay una **proporcionalidad inversa**:*

$$\frac{80}{x}=\frac{2{,}5}{3} \qquad \rightarrow \qquad x=\frac{80\cdot 3}{2{,}5}=96\ km/h$$

Problemas como los anteriores se pueden resolver también en la práctica con la llamada ***regla de tres*** (directa o inversa, según el caso) que simplemente consiste en organizar los datos sin escribir las fracciones que indican la relación entre ellos. El cuarto valor se calcula (sin justificar) así:

- **Proporcionalidad directa**: el producto de la diagonal completa dividido entre el valor en diagonal a la "x".
- **Proporcionalidad inversa**: el producto de la horizontal completa dividido entre el valor de la horizontal de la "x".

En los ejemplos anteriores, se haría así:

- Ejemplo 1: como entre los kilogramos de naranjas y los euros a pagar hay proporcionalidad **directa**:

$$\left.\begin{array}{lcr} 5\ kg & \rightarrow & 8\ € \\ x & \rightarrow & 20\ € \end{array}\right\} \qquad x=\frac{5\cdot 20}{8}=12{,}5\ kg$$

- Ejemplo 2: como entre la velocidad y las horas de viaje hay proporcionalidad **inversa**::

$$\left.\begin{array}{lcr} 80\ km/h & \rightarrow & 3\ h \\ x & \rightarrow & 2{,}5\ h \end{array}\right\} \qquad x=\frac{80\cdot 3}{2{,}5}=96\ km/h$$

Como ves, el resultado es el mismo y este procedimiento resulta más intuitivo, pero si no se organiza bien la información es fácil cometer errores.

Dos aplicaciones prácticas de la proporcionalidad son los problemas de repartos y los porcentajes. Veámoslo con ejemplos:

5.1. PORCENTAJES

Un porcentaje representa el valor de una propiedad cuyo valor de referencia es 100, por lo que en realidad es una forma de escribir una fracción cuyo denominador es 100. Su cálculo se puede plantear como una proporcionalidad directa, una regla de tres directa o de la definición de fracción como parte de un todo. En cualquiera de los casos, se puede utilizar este esquema general:

$$\frac{\%}{100}=\frac{Cantidad}{Base}$$

La anterior expresión permite calcular uno de los tres elementos de la igualdad, conociendo dos de ellos (no es necesario memorizarlas):

$$\% = \frac{Cantidad \cdot 100}{Base} \qquad Cantidad = \frac{\% \cdot Base}{100} \qquad Base = \frac{Cantidad \cdot 100}{\%}$$

Los porcentajes son muy habituales en la economía (descuentos, el IVA, el IPC, los tipos de interés), la sociología o la ciencia. Pueden ser disminuciones o aumentos de una propiedad, o aplicarse de forma sucesiva, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo 1: ¿Cuántos euros nos descontarán al comprar un televisor que costaba 700 €, si nos han dicho que nos harán una rebaja del 15%?

Solución: el problema puede resolverse como una proporcionalidad directa o como una regla de tres directa, en las que el porcentaje de descuento indica lo que descontarán por cada 100 €; también se puede resolver a partir del significado del porcentaje como una fracción en la que el denominador es 100:

- *Por proporcionalidad directa:*

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{700} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{15 \cdot 700}{100} = 105 \text{ €}$$

- *Por regla de tres directa:*

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ €} \rightarrow \ \ 15 \text{ €} \\ 700 \text{ €} \rightarrow \ \ x \end{array}\right\} \quad x = \frac{15 \cdot 700}{100} = 105 \text{ €}$$

- *Considerando el porcentaje como una fracción cuyo denominador es 100:*

$$Descuento = 15\% \ de \ 700 \text{ €} = \frac{15}{100} \ de \ 700 = \frac{15 \cdot 700}{100} = 105 \text{ €}$$

Ejemplo 2: Calcula el porcentaje que ha aumentado la población de linces de un parque natural en los últimos cinco años, si ha pasado de 26 a 43 ejemplares en este tiempo.

Solución: el problema puede resolverse a partir de la expresión general para los porcentajes, como una proporcionalidad directa o como una regla de tres directa. El porcentaje pedido es lo que variaría esta población si hace cinco años hubiera 100 ejemplares:

	Hace cinco años	*Variación*
Número de ejemplares	26	$43 - 26 = 17$
Porcentajes	100	x

- *Por la expresión general de los porcentajes:*

$$\frac{\%}{100} = \frac{17}{26} \quad \rightarrow \quad \% = \frac{17 \cdot 100}{26} \cong 65{,}4\%$$

- *Por proporcionalidad directa:*

$$\frac{17}{26} = \frac{x}{100} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{17 \cdot 100}{26} \cong 65{,}4\%$$

- *Por regla de tres directa:*

$$\left.\begin{array}{l} 26 \rightarrow \ \ 17 \\ 100 \rightarrow \ \ x \end{array}\right\} \quad x = \frac{17 \cdot 100}{26} \cong 65{,}4\%$$

Ejemplo 3: En un comercio hay una campaña de rebajas en la que aplican un 20% a todos los artículos en venta, más un 15% de descuento adicional sobre el precio rebajado a los clientes con tarjeta de fidelidad. ¿Cuánto pagará durante esta campaña un cliente con tarjeta de fidelidad por un TV que costaba 760 €?

Solución: se trata de un problema de ***porcentajes encadenados****, en el que, como se verá, el descuento para el cliente con tarjeta de fidelidad es algo inferior al 35%, como podría pensarse precipitadamente, ya que el segundo descuento es sobre el precio rebajado.*
En cuanto a las cantidades a pagar tras cada uno de los descuentos aplicados, en el primero se pagará el 80% (que resulta de hacer 100-20), mientras que en el segundo será el 85% (100-15), por tanto:

$$Precio\ final = 85\%\ del\ 80\%\ de\ 760\ € = \frac{85}{100}\ de\ \frac{80}{100}\ de\ 760\ € =$$

$$= \frac{85 \times 80 \times 760}{10000}\ € = \frac{5168000}{10000}\ € = \mathbf{516,80}\ €$$

Aunque lo anterior se podría calcular por cualquiera de los procedimientos utilizados en los ejercicios anteriores, aplicando el concepto de ***"tanto por uno"*** *el cálculo se agiliza mucho:*

$$Precio\ final = 85\%\ del\ 80\%\ de\ 760\ € = 0,85 \times 0,8 \times 760\ € = 0,68 \times 760\ € = \mathbf{516,80}\ €$$

El ***0,85*** *y el* ***0,8*** *son los* ***"tantos por uno"*** *de lo que se paga aplicando cada descuento (resultan de dividir 85 y 80 entre 100, respectivamente). El* ***0,68*** *que aparece antes del último cálculo indica que se pagará el* ***68%*** *del precio sin rebajar, es decir, que el descuento real es el 32% (100-68), no el 35%.*

1. INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

El **álgebra** es una parte de las matemáticas en la que aparecen operaciones matemáticas entre números y letras (llamadas **variables**) que representan cualquier número.
Las expresiones algebraicas son de gran utilidad porque permiten describir de forma generalizada la relación existente entre diferentes magnitudes, permitiendo calcular fácilmente la relación con valores concretos de estas magnitudes.
Ejemplos de expresiones algebraicas:

- Diferencia de dos números: $\boldsymbol{a - b}$
- Doble de un número menos el triple de otro: $\boldsymbol{2x - 3y}$
- Suma de varias potencias de un número: $\boldsymbol{x^4 + x^3 + x^2 + x}$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado de realizar las operaciones matemáticas que aparecen en ella cuando se conocen los valores de las variables.
Ejemplo:
El valor numérico de $\boldsymbol{2x - 3y}$ cuando $x = 5$, e $y = 7$ es $2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 10 - 21 = -11$

Para obtener el valor numérico del ejemplo, en el que es preciso realizar operaciones con varios números entre los que no hay paréntesis, se han seguido los siguientes criterios de **prioridad de operaciones**, haciendo las operaciones en este orden:

1. Las potencias, si las hay.
2. El producto o el cociente, antes que la suma o la resta.
3. Si sólo hay productos y cocientes sin paréntesis, las operaciones se hacen en el orden en el que aparecen (de izquierda a derecha).

1.1. MONOMIOS

Los **monomios** son el tipo de expresión algebraica más sencilla, ya que en ellos las únicas **operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural. Ejemplo:**

$$5x^2y$$

Elementos de un monomio:

- **Coeficiente:** es el número que suele ir delante multiplicando a las letras; no se escribe si es uno y, si es cero, hace que todo el monomio sea cero. En el ejemplo es el $\mathbf{5}$.
- **Parte literal:** es el resto del monomio que contiene a las letras, siendo **semejantes** entre sí los monomios con la misma parte literal. En el ejemplo es $\boldsymbol{x^2y}$.
- **Grado:** para cada variable, es su exponente; el del monomio es la suma de los exponentes de las letras. El monomio del ejemplo sería de grado tres: grado dos respecto de x, y uno respecto de y.

Las operaciones matemáticas con monomios cumplen las mismas propiedades que cuando se hacen entre números pero, por sus características, se realizan de forma especial:

- **Sumas y restas:**
- ✓ Con monomios semejantes: basta sumar o restar los coeficientes.
  Ejemplo: $5x^2y + 4x^2y = \mathbf{9x^2y}$
- ✓ Con monomios no semejantes: el resultado es un **polinomio** (otro tipo de expresión algebraica).
  Ejemplo: $5x^2y + 3xy$
- **Producto:** se realiza aplicando a cada letra las propiedades de los productos de potencias, por lo que el resultado es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuyo grado es la suma de los grados (para cada variable y el total).
  Ejemplo: $(\mathbf{5x^2y}) \cdot (\mathbf{2xyz}) = (5 \cdot 2)x^{2+1}y^{1+1}z = \mathbf{10x^3y^2z}$
- **Cociente:** se realiza también aplicando a cada letra las propiedades del cociente de potencias, pero el resultado sólo será otro monomio si el grado de cada una de las variables en el divisor no es mayor que en el dividendo, en cuyo caso el resultado es un monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes, y cuyo grado para cada variable es la diferencia de los grados.
  Ejemplo: $(\mathbf{10x^3y^2z}) : (\mathbf{5x^2y}) = (10:5)x^{3-2}y^{2-1}z = \mathbf{2xyz}$

1.2. POLINOMIOS

Los **polinomios** son expresiones algebraicas que resultan de sumar monomios que no son semejantes.
Ejemplo: $3x^2 - x + 7$ es un polinomio con una sola variable (la x).

Los elementos de un polinomio son:

- **Términos:** son cada uno de los monomios que lo forman. Para referirse a cada uno de ellos se cita su grado. En el ejemplo, el término de grado dos es $\mathbf{3x^2}$, el de grado uno $-\boldsymbol{x}$ y el término independiente o término de grado cero es $\mathbf{7}$.
- **Coeficientes:** son los correspondientes a cada término; si no aparece el término de un determinado grado, se considera que su coeficiente es cero. En el ejemplo, el coeficiente del término de grado dos es $\mathbf{3}$, el del término de grado uno $-\mathbf{1}$ y el del término de grado cero $\mathbf{7}$.
- **Grado:** es el grado del término de mayor grado de los que forman el polinomio. El polinomio del ejemplo es de segundo grado (grado dos).

Las operaciones matemáticas con polinomios son consecuencia de las que se realizan entre monomios, pero adaptadas a sus características:

- **Sumas y restas:** basta con sumar o restar entre sí los términos semejantes.
  Ejemplo: $(3x^2 - x + 7) + (5x - 9) = 3x^2 + 4x - 2$
  También puede hacerse poniendo los polinomios a sumar en filas, con los términos semejantes en la misma columna (recomendable para polinomios más complejos):

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 7 \\ 5x - 9 \\ \hline 3x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

  La resta se hace sumando al primer polinomio el segundo con todos sus coeficientes cambiados de signo:

Ejemplo: $(3x^2 - x + 7) - (5x - 9) = (3x^2 - x + 7) + (-5x + 9) = 3x^2 - 6x + 16$
Haciéndolo en filas:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 7 \\ -5x + 9 \\ \hline 3x^2 - 6x + 16 \end{array}$$

- **Producto:** se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, por lo que en la práctica consiste en multiplicar entre sí todos los términos de los dos polinomios y luego sumar los términos semejantes. El resultado será un polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios multiplicados.

  Ejemplo:$(3x^2 - x + 7) \cdot (5x - 9) = 15x^3 - 27x^2 - 5x^2 + 9x + 35x - 63$
  Agrupando términos semejantes queda $15x^3 - 32x^2 + 44x - 63$

  El producto también puede hacerse poniendo los polinomios en filas, como si fuera una cuenta con números. Conviene en este caso dejar en la fila inferior el polinomio con menos términos y multiplicar los términos de izquierda a derecha:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 7 \\ 5x - 9 \\ \hline 15x^3 - 5x^2 + 35x \quad\quad \\ -27x^2 + \ \ 9x - 63 \\ \hline \mathbf{15x^3 - 32x^2 + 44x - 63} \end{array}$$

- **Cociente:** como en el cociente de monomios, sólo dará como resultado otro polinomio, si el grado del divisor no es mayor que el del dividendo. En este caso, el cociente es un polinomio cuyo grado es la diferencia entre el grado del dividendo y el del divisor. Como con el cociente entre números, puede ser exacto o con resto distinto de cero.
  El procedimiento de la división de polinomios es similar al utilizado para dividir números enteros de varias cifras: se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor para obtener el primer término del cociente, que luego se multiplica por todos los términos del divisor, restando los resultados al dividendo para obtener el resto parcial de la división. Con éste se vuelve a repetir el mismo procedimiento hasta obtener como resto un polinomio de menor grado que el del divisor.

  Ejemplo: $(15x^3 - 32x^2 + 44x - 63)\mathbf{:}\ (3x^2 - x + 7)$

$$\begin{array}{r|l} 15x^3 - 32x^2 + 44x - 63 & 3x^2 - x + 7 \\ \cline{2-2} -15x^3 + 5x^2 - 35x \quad\quad & \mathbf{5x - 9} \\ \cline{1-1} -27x^2 + 9x - 63 & cociente \\ 27x^2 - 9x + 63 & \\ \cline{1-1} \mathbf{0} \quad (resto) & \end{array}$$

  Se comienza dividiendo $15x^3$ entre $3x^2$; el resultado $(5x)$ se multiplica por el divisor $(3x^2 - x + 7)$, cambiando el signo a los resultados para obtener el primer resto parcial $(-27x^2 + 9x - 63)$, con el que se repite el proceso, que da en este caso como resto cero (la división es exacta).

1.3. IDENTIDADES NOTABLES

Las **identidades o igualdades notables** son expresiones algebraicas frecuentes cuyo conocimiento permite ahorrar cálculos repetitivos. De todas ellas, aquí veremos el cuadrado de la suma, el cuadrado de la diferencia y la suma por la diferencia:

- *El **cuadrado de la suma** de dos monomios,a y b, es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- *El **cuadrado de la diferencia** de dos monomios, a y b, es igual al cuadrado del primero, **menos** el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- El producto de la **suma** de dos monomios,a y b, **por su diferencia** es igual al cuadrado del primero de los monomios menos el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Para demostrar las tres igualdades anteriores, basta con realizar las operaciones que contienen:

Cuadrado de la suma

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

$$\begin{array}{rr} & a+b \\ & a+b \\ \hline & a^2+ab \\ & ab+b^2 \\ \hline \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{+2ab+b^2} \end{array}$$

Cuadrado de la diferencia

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$$

$$\begin{array}{rr} & a-b \\ & a-b \\ \hline & a^2-ab \\ & -ab+b^2 \\ \hline \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{-2ab+b^2} \end{array}$$

Suma por diferencia

$$(a+b)\cdot(a-b)$$

$$\begin{array}{rr} & a+b \\ & a-b \\ \hline & a^2+ab \\ & -ab-b^2 \\ \hline \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{-b^2} \end{array}$$

Ejemplos:

- $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $(5xy-3)^2 = 25x^2y^2 - 30xy + 9$
- $(7x+3y)\cdot(7x-3y) = 49x^2 - 9y^2$

2. ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una **ecuación algebraica** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, de forma que se desconoce el valor de alguna de las variables. Como no todos los valores de cada variable hacen que el valor numérico de las dos expresiones algebraicas coincida, las variables reciben el nombre de **incógnitas** porque sólo algunos de sus posibles valores hacen que se cumpla la igualdad (a veces no los hay, es decir, la ecuación no tiene solución). Las expresiones algebraicas que hay a ambos lados del signo igual se llaman, respectivamente, primer y segundo **miembro** de la ecuación.

Ejemplo:

$$3x + 5 = 2x + 4$$

Esta igualdad sólo se cumple cuando $\boldsymbol{x = -1}$ porque, al sustituir x por -1 los valores obtenidos a izquierda y derecha coinciden (esto es ***hacer la prueba*** de la ecuación):

$$\begin{gathered} 3x + 5 = 2x + 4 \\ 3 \cdot (-1) + 5 = 2 \cdot (-1) + 4 \\ -3 + 5 = -2 + 4 \\ \mathbf{2 = 2} \end{gathered}$$

Resolver una ecuación algebraica consiste en obtener, si existen, el o los valores de las incógnitas para que el resultado de las operaciones a la izquierda del signo igual coincida con el resultado de las operaciones a la derecha de éste (en definitiva, que el valor numérico de la expresión algebraica correspondiente al primer miembro coincida con el de la expresión algebraica del segundo miembro). Para conseguirlo hay dos opciones:

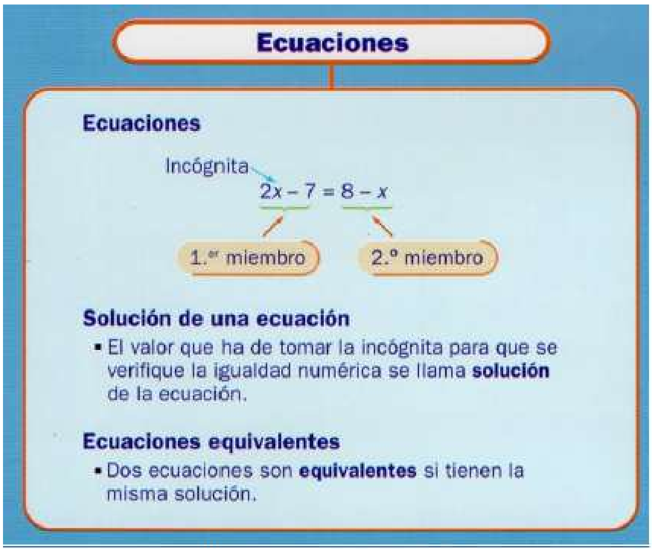
1) Elegir por tanteo la posible solución y calcular los valores numéricos. Si coinciden, se ha encontrado la solución; si no coincide, hay que probar con los que sean necesarios hasta dar con la solución. Evidentemente, este procedimiento no es recomendable porque podría alargarse indefinidamente.

2) Transformar la ecuación original en otra equivalente (con las mismas soluciones), pero que sea más sencilla. Dependiendo del tipo de ecuación, pueden utilizarse diferentes procedimientos, pero en general todos están basados en realizar la misma operación a ambos lados del signo igual:

- Sumando o restando a ambos miembros de la ecuación el mismo número o expresión algebraica, se consigue hacer la **trasposición de sumandos**. En la práctica, sirve para dejar las incógnitas en el primer miembro y los números en el segundo.
- Multiplicando o dividiendo a ambos miembros de la ecuación por el mismo número o expresión algebraica, se consigue hacer la **trasposición de factores**. En la práctica, sirve para obtener el valor de la incógnita después de haberla dejado en el primer miembro.

2.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Las ecuaciones algebraicas en las que sólo hay una letra con exponente uno, se conocen como **ecuaciones de primer grado con una incógnita**.



Elementos de una ecuación

En general, para resolver una ecuación de primer grado hay que seguir estos pasos:

1. Eliminar los denominadores, si los hay.
2. Eliminar los paréntesis, si los hay.
3. Trasponer los sumandos.
4. Trasponer factores.
5. Comprobar el resultado.

Ejemplo 1: $\mathbf{2x - 7 = 8 - x}$

$$2x + x = 8 + 7$$
$$3x = 15$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$\boldsymbol{x = 5}$$

Prueba $(x = 5)$

$$2 \cdot 5 - 7 = 8 - 5$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 = 3$$

Como los dos valores numéricos coinciden, la solución $\boldsymbol{x = 5}$ es correcta.

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{\frac{x-7}{4} + \frac{x-1}{3} = x - 5}$$

$$12 \cdot \left(\frac{x-7}{4}\right) + 12 \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right) = 12 \cdot (x - 5)$$
$$3 \cdot (x - 7) + 4 \cdot (x - 1) = 12x - 60$$
$$3x - 21 + 4x - 4 = 12x - 60$$
$$7x - 25 = 12x - 60$$
$$7x - 12x = -60 + 25$$
$$-5x = -35$$
$$5x = 35$$
$$x = \frac{35}{5}$$
$$x = \mathbf{7}$$

Prueba $(\boldsymbol{x = 7})$:

$$\frac{7-7}{4} + \frac{7-1}{3} = 7 - 5$$
$$\frac{0}{4} + \frac{6}{3} = 2$$
$$2 = 2$$

Como los dos valores numéricos coinciden, la solución $\boldsymbol{x = 7}$ es correcta.

2.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando se tienen que cumplir a la vez las condiciones que representan dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, éstas constituyen un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas**.
Ejemplo: el siguiente es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Hay muchos números que cumplen la primera ecuación ($x = 0; y = 10;\ \ x = 1;\ \ y = 9, \ldots\ldots$); también hay muchos que cumplen la segunda ($x = 6; y = 0;\ \ x = 7; y = 1; x = 8; y = 2, \ldots.$). Pero los únicos que cumplen ambas ecuaciones a la vez son $\boldsymbol{x = 8}; \boldsymbol{y = 2}$; por eso, estos dos números son la solución del sistema anterior.

Los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas se resuelven de forma similar a las ecuaciones algebraicas de una incógnita, pero convirtiendo el sistema original en una sola ecuación con una incógnita, para lo que se puede utilizar uno de los siguientes métodos:

Sustitución: se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación, resultando ésta una ecuación de una incógnita, que ya puede ser resuelta:

$$\begin{cases} x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x \\ x - y = 6 \qquad\qquad \downarrow \ \rightarrow\ x - (10 - x) = 6;\ x - 10 + x = 6\,;\quad 2x = 6 + 10;\ \ \boldsymbol{x} = \dfrac{16}{2} = \boldsymbol{8} \end{cases}$$

Para sacar la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en la expresión obtenida al despejarla al principio: $\boldsymbol{y} = 10 - x =\ 10 - 8 = \boldsymbol{2}$

Igualación: se despeja la misma incógnita en cada una de las ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas, que contendrán sólo la otra incógnita, por lo que de nuevo hay que resolver una ecuación de una sola incógnita:

$$\left.\begin{cases} x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x \\ x - y = 6 \ \rightarrow y = x - 6 \end{cases}\right\} \rightarrow 10 - x = x - 6;\quad -x - x = -6 - 10;\ \ \boldsymbol{x} = \frac{-16}{-2} = \boldsymbol{8}$$

La otra incógnita se obtendría, como antes, sustituyendo en cualquiera de las dos expresiones en las que se había despejado.

Reducción: se multiplican las ecuaciones iniciales por los números que permitan obtener el mcm de los coeficientes de una de las incógnitas, para que ésta pueda ser eliminada al sumar las nuevas ecuaciones obtenidas. Así resulta una ecuación con la otra incógnita, que se resolverá por los procedimientos habituales:

$$\begin{cases} x + y = 10 \xrightarrow{\times 1} x + y = 10 \\ x - y = \ \ 6 \xrightarrow[\times 1]{} x - y = 6 \\ \qquad\qquad\quad\ 2x \quad = 16 \rightarrow\ \ \boldsymbol{x} = \dfrac{16}{2} = \boldsymbol{8} \end{cases} ;\qquad \begin{cases} x + y = 10 \xrightarrow{\times 1}\ x + y = 10 \\ x - y = \ \ 6 \xrightarrow[\times(-1)]{} -x + y = -6 \\ \qquad\qquad\qquad\ 2y\ = 4\ \ \rightarrow\ \boldsymbol{y} = \dfrac{4}{2} = \boldsymbol{2} \end{cases}$$

2.3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resultan de igualar a cero un polinomio de segundo grado y, por tanto, tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

En la ecuación general de segundo grado, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son los **coeficientes** de los términos de grado dos, uno y cero, respectivamente; en cada caso concreto, pueden ser cualquier tipo de número real (positivos, negativos, racionales o irracionales), aunque lo normal es trabajar con números enteros.

Ejemplos:

- En la ecuación $\boldsymbol{x^2 + 3x - 4 = 0}$, los coeficientes son $\boldsymbol{a = 1;\ b = 3;\ c = -4}$.

- En la ecuación $\boldsymbol{3x^2 - x} = 0$, los coeficientes son $\boldsymbol{a = 3;\ b = -1; c = 0}$.

Hay que tener **mucho cuidado** con el signo de los coeficientes y de si aparecen o no, ya que no se escriben en la ecuación cuando son $\mathbf{1}$ y van delante de $\boldsymbol{x^2}$ o de $\boldsymbol{x}$, pero son $\mathbf{0}$ cuando no aparece el término de primer grado o cuando no hay término independiente (nunca puede ser $\mathbf{0}$ el coeficiente del término de segundo grado, $\boldsymbol{a}$, porque entonces sería una ecuación de primer grado).

En la resolución de las ecuaciones de segundo grado, si es necesario, hay que transformar la ecuación original al formato de la ecuación general visto antes, para lo que se pueden utilizar procedimientos parecidos a los usados para las de primer grado:

1. Quitar denominadores, si existen, multiplicando todos los términos por el mcm de los denominadores.
2. Quitar paréntesis, si los hay, aplicando la propiedad distributiva.
3. Agrupar todos los términos de la ecuación en el primer miembro de la misma, usando la trasposición de sumandos (el segundo miembro siempre queda cero).
4. Sumar los términos semejantes que haya en el primer miembro.

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x-3}{5} = \frac{9}{2}$$

$$5x^2 + 2 \cdot (x - 3) = 45$$

$$5x^2 + 2x - 6 = 45$$

$$5x^2 + 2x - 6 - 45 = 0$$

$$\boldsymbol{5x^2 + 2x - 51 = 0}$$

Esta última ecuación ya está en el formato general, siendo $\boldsymbol{a = 5}$; $\boldsymbol{b = 2}$; $\boldsymbol{c = -51.}$

Una vez escrita la ecuación de segundo grado en el formato general, **no suele ser posible despejar directamente la incógnita** como en las ecuaciones de primer grado, y además puede ocurrir que haya dos soluciones, una o ninguna, según los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, como veremos más adelante.

Las ecuaciones **completas de segundo grado** (las que tienen todos los coeficientes distintos de cero) se resuelven con esta fórmula:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Aunque se puede aplicar la fórmula una vez identificados los coeficientes, para facilitar su uso, suele calcularse aparte lo que hay dentro de la raíz cuadrada, que recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación y se representa con el símbolo Δ ("delta" mayúscula), porque indica el **número de soluciones que tiene la ecuación**, pudiéndose dar tres casos:

$$\Delta=\boldsymbol{b^2-4ac}\begin{array}{lll}\nearrow & >0\rightarrow & \textit{dos soluciones}\\ \rightarrow & =0\rightarrow & \textit{una solución}\\ \searrow & <0\rightarrow & \text{sin}\ \textit{solución}\end{array}$$

Al sustituir en las fórmulas anteriores los valores de los coeficientes, hay que tener mucho cuidado con su signo, ya que, además de para evitar errores, los que sean negativos deben escribirse entre paréntesis.

Ejemplo: $\boldsymbol{x^2+3x-4=0}$

En esta ecuación los coeficientes son $\boldsymbol{a=1}$; $\boldsymbol{b=3}$; $\boldsymbol{c=-4}$, por lo que, al sustituir estos valores en las fórmulas anteriores, resulta:

$$\textit{discriminante}:\quad \Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=\mathbf{25}>0\rightarrow\boldsymbol{dos\ soluciones}$$

Como el discriminante es positivo ($\Delta=25$), se continúa con la fórmula que da las soluciones, teniendo en cuenta que ya se ha calculado lo que está dentro de la raíz cuadrada (el discriminante):

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{array}{l}\nearrow x=\dfrac{-3+5}{2}=\dfrac{2}{2}=\mathbf{1}\\ \searrow x=\dfrac{-3-5}{2}=\dfrac{-8}{2}=\mathbf{-4}\end{array}$$

Por tanto, las soluciones son $\boldsymbol{x=1}$; $\boldsymbol{x=-4}$. Veamos si ambas cumplen la ecuación original (pruebas de que la ecuación está bien resuelta):

$$\boldsymbol{x=1}\ \rightarrow\qquad x^2+3x-4=0\rightarrow\qquad \begin{aligned}\mathbf{1}^2+3\cdot\mathbf{1}-4&=0\\1+3-4&=0\\4-4&=0\\\mathbf{0}&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x=-4}\qquad x^2+3x-4=0\rightarrow \begin{aligned}(\mathbf{-4})^2+3\cdot(\mathbf{-4})-4&=0\\16-12-4&=0\\16-16&=0\\\mathbf{0}&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

Es decir, las dos soluciones son correctas.

Las **ecuaciones de segundo grado incompletas** (a las que les falta alguno de los coeficientes de la ecuación general porque es cero), se pueden resolver usando la fórmula general, pero resulta mucho más cómodo hacerlo casi como si fueran ecuaciones de primer grado. Puede haber dos casos:

1. Cuando falta el término de primer grado ($\boldsymbol{b = 0}$).

   La ecuación es de la forma $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

   Como no hay término de primer grado, se puede despejar $\boldsymbol{x^2}$; luego, para deshacer su cuadrado, se hace raíz cuadrada en los dos términos:

$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = \frac{-c}{a}$$
$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

   El signo $\pm$, se añade para indicar de forma abreviada que vale el resultado positivo de la raíz cuadrada, pero también el negativo. Esta operación se podrá hacer siempre que $-\boldsymbol{c/a}$ sea positivo (en caso contrario no hay solución).

   Ejemplo: $\boldsymbol{4x^2 - 100 = 0}$

$$4x^2 = 100$$
$$x^2 = \frac{100}{4}$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$\boldsymbol{x = \pm 5}$$

   Las soluciones son $\boldsymbol{x = 5}; \boldsymbol{x = -5}$

2. Cuando falta el término independiente ($\boldsymbol{c = 0}$):

   La ecuación es de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

   Como todos los términos llevan $\boldsymbol{x}$, se puede factorizar la ecuación sacando factor común, lo que indica que el producto de dos factores es cero, por lo que uno de los dos tiene que valer cero. De esta forma se obtienen las dos soluciones casi como si fuera una ecuación de primer grado:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \nearrow \ \boldsymbol{x = 0} \\ \searrow \ ax + b = 0 \\ \qquad ax = -b \\ \qquad \boldsymbol{x = \frac{-b}{a}} \end{cases}$$

   De las dos soluciones, la primera se considera trivial (evidente y sin importancia), siendo normalmente la interesante la segunda.

   Ejemplo: $\boldsymbol{x^2 - 10x = 0}$

$$x \cdot (x - 10) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \nearrow \ \boldsymbol{x = 0} \\ \searrow \ x - 10 = 0 \\ \qquad \boldsymbol{x = 10} \end{cases}$$

   Las soluciones son $\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{x = 10}$

Por supuesto, todas las ecuaciones de segundo grado pueden resolverse con la fórmula de la ecuación general completa de segundo grado, pero, como puede apreciarse, es más fácil hacerlo de la forma indicada cuando son incompletas.

2.4. PROBLEMAS ALGEBRAICOS

La parte realmente práctica de todos los contenidos estudiados hasta ahora, es poder resolver problemas de la vida cotidiana traduciéndolos previamente a lenguaje matemático.
En general se llamará incógnita a la cantidad desconocida que se quiere calcular. Suele identificarse con la letra "x", aunque se puede utilizar cualquier otra letra.

Antes de traducir a lenguaje algebraico todo un problema, conviene practicar con algunos ejemplos de "frases" típicas:

El doble de un número:	$\boldsymbol{2x}$
La mitad de un número:	$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
El doble de un número más ese mismo número:	$\boldsymbol{2x+x}$
El triple de un número menos la cuarta parte de otro número:	$\boldsymbol{3x-\frac{y}{4}}$

Para resolver problemas mediante ecuaciones conviene seguir estos siguientes pasos:

1. Leer atentamente el enunciado.
2. Traducir la información al lenguaje algebraico.
3. Plantear la ecuación o el sistema de ecuaciones.
4. Resolver la ecuación o el sistema.
5. Comprobar el resultado.

EJEMPLOS RESUELTOS:

Ejemplo 1: *Pedro tiene 14 años, y su hermana Ana 2. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de Pedro sea el triple que la de su hermana Ana?*

Tras la lectura atenta del enunciado, se traduce la información al lenguaje algebraico:

- Años que tienen que pasar:x
- Edad de Pedro dentro de x años:$14 + x$
- Edad de Ana dentro de x años:$2 + x$
- Con esta información se plantea la ecuación:$14 + x = 3 \cdot (2 + x)$
- Ahora, se resuelve la ecuación:

$$14 + x = 6 + 3x$$
$$x - 3x = 6 - 14$$
$$-2x = -8$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{-8}{-2} = \boldsymbol{4}$$

- Comprobación del resultado:
  Dentro de 4 años Pedro tendrá 18 y Ana 6, por lo que entonces la edad de Pedro será el triple que la de Ana ($18: 6 = 3$), luego la solución $\boldsymbol{x = 4}$ es correcta.

Ejemplo 2: *Se compran 22 animales entre gallinas y conejos. ¿Cuántos animales se han comprado de cada clase, si en total se ha pagado 90 € y el precio de una gallina es 3 € y el de un conejo 5 €?*

En este caso, aunque no se dispone de sistema de ecuaciones, la lectura atenta del enunciado del problema permite recopilar la información que contiene (se puede hacer en una tabla), que conduce a plantear las correspondientes ecuaciones algebraicas:

Animales	Número de animales	Precio por animal (€)
Gallinas	x	3
Conejos	y	5
Total	22	90

Con los datos anteriores se puede plantear una ecuación para el número de animales y otra para el dinero pagado:

- Número de animales: $x + y = 22$
- Cantidad a pagar: $3x + 5y = 90$

Estas dos ecuaciones son un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se puede resolver, por ejemplo, por el método de sustitución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 22} \\ \boldsymbol{3x + 5y = 90} \end{cases}$$

1. Se despeja la $\boldsymbol{x}$ en la primera ecuación (es preferible en la primera porque así no será necesario trabajar con fracciones):

$$x + y = 22 \rightarrow \boldsymbol{x = 22 - y}$$

2: Se sustituye la expresión anterior en la segunda ecuación:

$$3x + 5y = 90 \rightarrow 3 \cdot (\boldsymbol{22 - y}) + 5y = 90$$

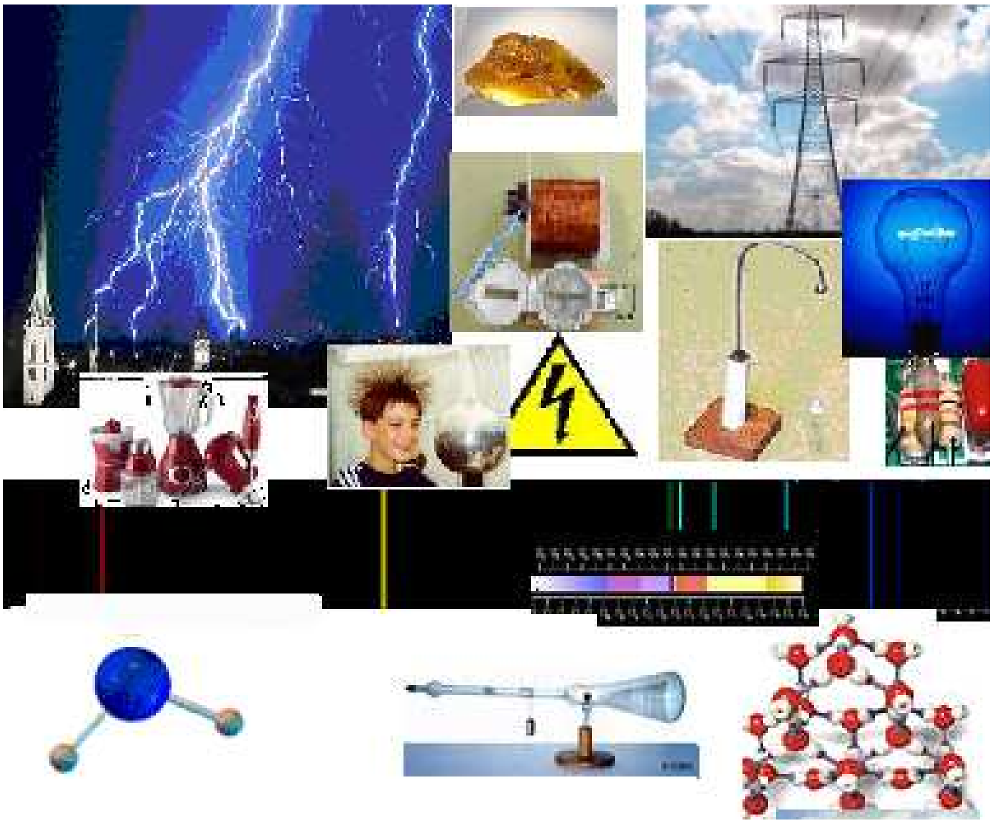
3. Se resuelve la ecuación obtenida:

$$3 \cdot (22 - y) + 5y = 90$$
$$66 - 3y + 5y = 90$$
$$-3y + 5y = 90 - 66$$
$$2y = 24$$
$$y = \frac{24}{2}$$
$$\boldsymbol{y = 12}$$

4. Se sustituye el valor obtenido ($y = 12$) en la expresión del primer apartado para x:

$$x = 22 - y \rightarrow x = 22 - 12$$
$$\boldsymbol{x = 10}$$

Es decir, la solución es que se compró **10 gallinas** (30 €) y **12 conejos** (60 €)



1. ELECTRICIDAD

Los fenómenos asociados a lo que hoy conocemos como electricidad son conocidos desde la antigüedad. De hecho, la palabra ***electricidad*** procede de la que los griegos usaban para referirse al ámbar, una resina fósil que, al ser frotada con una piel o con lana, es capaz de atraer trocitos de papel, hilos y otros pequeños objetos, pudiendo incluso causar la aparición de chispas si se frota intensamente.
Otros fenómenos asociados a la electricidad, que siempre han suscitado la curiosidad humana, son los siguientes:

- Los rayos de las tormentas.
- La atracción o repulsión de pequeños objetos (como bolitas de papel) por algunos materiales previamente frotados (como el ámbar o un bolígrafo de plástico).
- Los chasquidos y chispas producidos al ponerse prendas de vestir, incluyendo el hecho de que se ponga el pelo o el vello de punta en estas circunstancias.
- Las "sacudidas" o descargas producidas al descender de un vehículo.

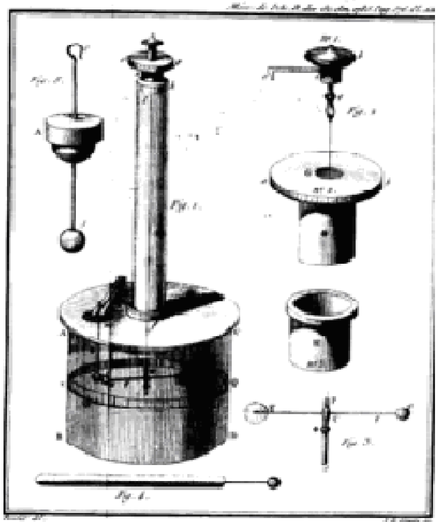
Durante mucho tiempo, todo ello estuvo considerado como algo entre lo místico, la magia y el entretenimiento, pero para lo que no había una explicación coherente. Tampoco se buscaron aplicaciones prácticas.

A finales del siglo XVI, el médico inglés **William Gilbert** realizó múltiples experimentos de electricidad e imanes, llegando a clasificar los materiales en conductores y aislantes de la electricidad, tras descubrir que algunos se comportaban de manera parecida al ámbar cuando eran frotados (por ello los llamó eléctricos). En 1600 publicó *"De Magnete"*, una obra en la que aparece la primera explicación racional de que las agujas imantadas apunten hacia el norte, proponiendo que la propia Tierra es un gran imán.

Los experimentos del físico francés **Cisternay du Fay**, le llevaron a proponer en 1733 la existencia de cargas eléctricas de distinto signo (que llamó electricidad vítrea y resinosa, actualmente denominadas electricidad positiva y negativa), así como la existencia de cuerpos conductores y aislantes y la fuerza de repulsión existente entre cuerpos cargados con electricidad del mismo tipo.

Por la misma época, **Benjamin Franklin** investigó los fenómenos eléctricos naturales, siendo particularmente famoso su experimento en el que hizo volar una cometa durante una tormenta. Ató la cometa, con esqueleto de metal, a un hilo de seda y éste a una llave metálica, comprobando que la llave se cargaba de electricidad. Demostró así que las nubes están cargadas de electricidad y que los rayos son descargas eléctricas. La aplicación inmediata de estas observaciones fue la invención del pararrayos, aunque también formuló una teoría, según la cual la electricidad sería un fluido único existente en toda la materia y clasificó las sustancias en eléctricamente positivas o negativas, de acuerdo con el exceso o defecto de ese fluido.
El físico e ingeniero francés **Charles-Augustin de Coulomb** fue el primero en establecer las leyes cuantitativas de las cargas eléctricas en reposo (la electrostática), además de realizar muchas investigaciones sobre magnetismo, rozamiento y electricidad. Con sus

investigaciones pudo exponer teóricamente los fundamentos del magnetismo y de la electrostática. Coulomb estudió en detalle las fuerzas de interacción entre partículas con carga eléctrica, haciendo referencia a cargas puntuales (aquellas cargas cuya magnitud es muy pequeña respecto a la distancia que las separa). Hacia 1777 efectuó medidas muy cuidadosas de las fuerzas existentes entre cargas puntuales utilizando una balanza de torsión similar a la usada por Cavendish para evaluar la ley de la gravitación universal. La balanza de torsión consiste en una barra que cuelga de un hilo que puede torcerse, de modo que, si la barra gira, el hilo tiende a devolverla a su posición original. Si se conoce el ángulo que gira la barra, puede medirse con precisión la fuerza de torsión que ejerce el hilo sobre la barra. Coulomb colocó en la barra de la balanza una pequeña esfera cargada y, a continuación, a diferentes distancias, posicionó otra esferita con carga de igual magnitud. Luego, observando el ángulo que giraba la barra, midió la fuerza entre ellas, llegando a la conclusión de que dicha fuerza (de repulsión o de atracción, según se trate de cargas eléctricas del mismo signo o de signos contrarios, respectivamente) es directamente proporcional al producto de dichas cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa (**Ley de Coulomb**):


Balanza de torsión de Coulomb

$$\boldsymbol{F = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}}$$

En la anterior expresión matemática, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{q}$ son las dos cargas eléctricas; $\boldsymbol{r}$ la distancia que las separa y $\boldsymbol{k}$ es una constante de proporcionalidad que depende del medio en el que se encuentren las cargas (en el vacío vale $\boldsymbol{9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2}$).

El significado de esta fórmula es que, para una carga dada, si se duplica la otra carga, la fuerza también se duplica. Sin embargo, si se duplica la distancia de separación entre las cargas, la fuerza se reduce a la cuarta parte.

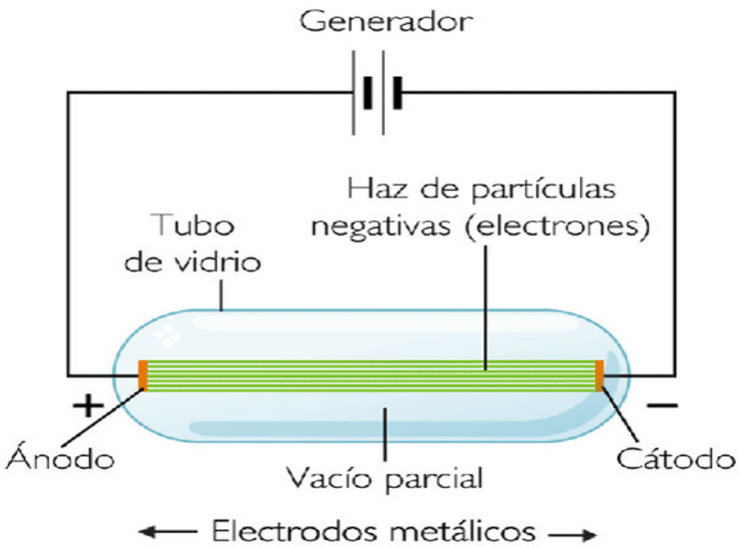
En honor a Coulomb, se ha establecido el culombio (C) como unidad de cantidad de carga eléctrica en el Sistema Internacional de unidades, correspondiendo a la carga de un cuerpo que, situada a un metro de otra carga igual, produce una repulsión entre dichas cargas de $9 \cdot 10^9 N$.

A lo largo de la primera mitad del siglo XIX se fueron descubriendo distintas facetas de las cargas eléctricas en movimiento (corrientes eléctricas), de modo que en 1819 **Christian Oersted** y **André Ampère** demostraron la relación entre corrientes eléctricas e imanes, al comprobar que una brújula se desviaba al paso de la corriente eléctrica. Las investigaciones sobre esta relación por científicos como **Joseph Henry** y **Michael Faraday**, permitieron desarrollar importantes aplicaciones tecnológicas, como los generadores y los motores eléctricos.

Otras facetas que se investigaron en esta época fueron el efecto Joule (desprendimiento de calor por un conductor al pasar por él una corriente eléctrica) y la relación entre corrientes eléctricas y reacciones químicas, siendo las pilas voltaicas y la electrólisis las aplicaciones inmediatas de las mismas.

Sin embargo, aunque se iba avanzando en el conocimiento de las leyes y las aplicaciones de la electricidad, nada hacía pensar, hasta finales del siglo XIX, que fuera algo relacionado con la constitución de la materia. De hecho, parecía claro que la electricidad sería un tipo de energía con aplicaciones que, poco a poco, fueron revolucionando la sociedad y la calidad de vida de las personas.

Por otro lado, a lo largo de todo el siglo XIX se había ido confirmando la teoría atómica de la materia, según la cual todas las sustancias estarían formadas por pequeñas partículas indivisibles (llamadas **átomos**), pudiendo existir átomos de diferentes tamaños, correspondientes a las diferentes sustancias sencillas, llamadas **elementos químicos**, que podrían unirse entre sí para formar toda la variedad de sustancias complejas que hay en la naturaleza (los **compuestos químicos**).
Pero el descubrimiento de los **rayos catódicos** en 1875, al conectar una corriente eléctrica de muy alto voltaje a un tubo en el que se había hecho el vacío, unió el estudio de la electricidad y de la materia.

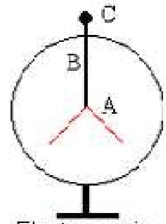


J.J. Thomson demostró que estos rayos estaban formados por unas partículas con carga eléctrica negativa, que eran casi dos mil veces más pequeñas que los átomos más pequeños que se conocían (los de hidrógeno). Esto significaba que se habían roto los átomos y, a la vez, se habían descubierto las partículas responsables de los fenómenos eléctricos. Estas partículas recibieron el nombre de **electrones** y su descubrimiento obligó a los científicos a investigar cómo tendrían que encontrarse dentro de la materia, ya que lo normal es que ésta se muestre eléctricamente neutra. Poco después del descubrimiento del electrón se encontró el **protón**, una partícula positiva del átomo, con una masa 1836 veces mayor que la del electrón. En 1932, Chadwick descubrió una partícula atómica neutra, de masa un poco mayor que la del protón, a la que llamó **neutrón**.

Se ha podido demostrar que **los electrones son las partículas más externas de los átomos**, por lo que, teniendo en cuenta que la carga eléctrica negativa la llevan los electrones y la positiva los protones, **cuando un cuerpo está cargado eléctricamente es porque ha ganado o perdido electrones** (si los gana, estará cargado negativamente, mientras que si los pierde quedará cargado positivamente), siendo eléctricamente neutro si tiene el mismo número de protones que de electrones.

1.1. ELECTRIZACIÓN DE LA MATERIA

Un cuerpo está cargado eléctricamente (**electrizado**) cuando ha perdido o ganado electrones, de manera que algunos átomos ya no tienen el mismo número de electrones que de protones. Estos átomos no neutros se llaman iones (**cationes**, si son positivos y **aniones** si son negativos).
Para el estudio de la electrización se emplean dos instrumentos muy útiles: el **electroscopio** y el **péndulo eléctrico**.
El **electroscopio** consta de dos láminas delgadas de oro o aluminio, **A**, que están fijas en el extremo de una varilla metálica, **B**, que pasa a través de un soporte **C** de ebonita, ámbar o azufre. Cuando se toca la bola del electroscopio con un cuerpo cargado, las láminas adquieren carga del mismo signo y se repelen, siendo su divergencia una medida de la cantidad de carga que ha recibido. La fuerza de repulsión electrostática se equilibra con el peso de las hojas.
Un **péndulo eléctrico** es una bola de un material aislante y ligero (como la madera de sauco) que cuelga con un hilo aislante de un soporte.

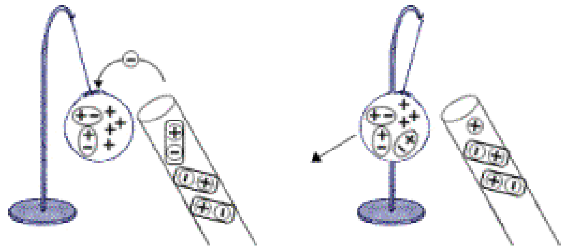


Electroscopio

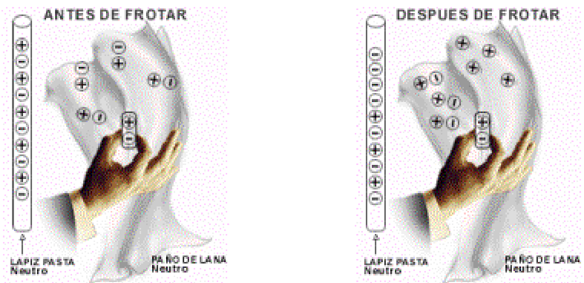

Péndulo eléctrico

Hay tres formas de electrizar un cuerpo: por contacto, por frotamiento y por inducción.

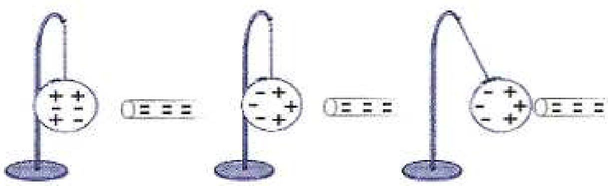
- **Electrización por contacto:** al tocar con un cuerpo cargado a otro eléctricamente neutro, la carga eléctrica se distribuye entre los dos, por lo que ambos quedan cargados con el mismo tipo de carga.
  La figura representa un péndulo con su esfera cargada positivamente. Al tocar la bola con una varilla neutra, ésta se carga también positivamente, por lo que la esfera sale rechazada por la varilla.



- **Electrización por frotamiento:** al frotar intensamente un cuerpo con un paño, éste se carga positiva o negativamente, dependiendo de su tendencia a perder o ganar electrones, respectivamente.
  La imagen muestra un lápiz que pierde electrones al ser frotado, quedando cargado positivamente.



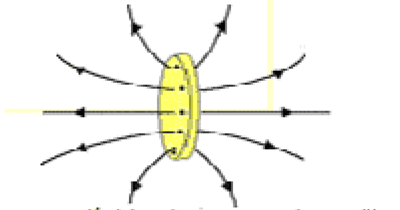
- **Electrización por inducción:** al acercar un cuerpo cargado eléctricamente (la varilla de la imagen, cargada negativamente) a otro neutro (la esfera de la imagen), las cargas en exceso del electrizado interactúan sobre las del neutro, haciendo que éstas se redistribuyan, acercándose las de signo opuesto a la carga del cuerpo electrizado (las positivas en el péndulo de la imagen) y alejándose las de igual signo (las negativas en el péndulo de la imagen). Esto hace que en la zona más próxima al cuerpo electrizado predominen las cargas contrarias a las de éste y en la más alejada las de igual signo, por lo que, **permaneciendo el objeto eléctricamente neutro**, está cargado positivamente en una zona y negativamente en la otra, siendo atraído por el objeto electrizado: el cuerpo electrizado **induce** una carga de signo contrario en el cuerpo neutro.



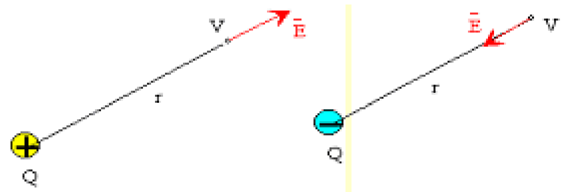
1.2. MAGNITUDES PARA EL ESTUDIO DE LAS INTERACCIONES ELÉCTRICAS

Todos los cuerpos cargados modifican las propiedades del espacio en una zona próxima a ellos. Esa zona constituye un campo eléctrico. La **intensidad de campo eléctrico**, **E**, en un punto es la fuerza que actuaría sobre una hipotética carga positiva de un culombio que estuviera en dicho punto. La intensidad de campo eléctrico se mide en newton por culombio (N/C): $E = \frac{F}{q}$

El **campo eléctrico** se representa gráficamente mediante **líneas de fuerza**, que son el camino que seguiría una carga positiva al dejarla en un determinado lugar de un campo eléctrico. Por tanto, las **líneas de fuerza del campo eléctrico salen de las cargas positivas y entran en las negativas.**



campo eléctrico de una moneda positiva



Líneas de campo de una carga positiva y otra negativa

El **potencial eléctrico**, $\boldsymbol{V}$, de un punto del campo, es el trabajo o energía, W, que hay que realizar para transportar la unidad de carga positiva desde el infinito hasta dicho punto:

$$Potencial\ eléctrico = \frac{trabajo}{carga} \quad ; \qquad \boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{q}}$$

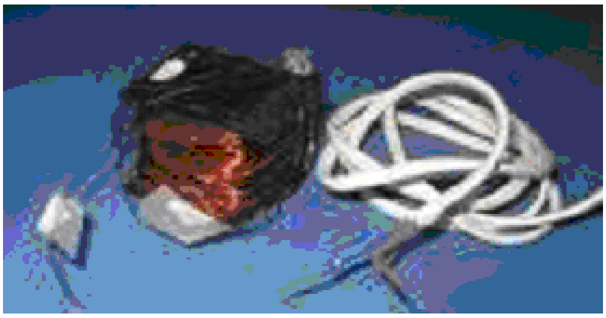
La unidad de potencial eléctrico en el SI es el julio por culombio (J/C), que se denomina **voltio**, V; se dice que un punto tiene un potencial de un voltio, si se realiza un trabajo de un julio para transportar un culombio de carga positiva desde el infinito a dicho punto.

La **diferencia de potencial o ddp, (**$\Delta \boldsymbol{V}$ o, por comodidad, simplemente $\boldsymbol{V}$**),** entre dos puntos cualesquiera de un campo eléctrico, A y B, es el trabajo o energía que hay que realizar para desplazar la unidad de carga eléctrica positiva desde el punto A hasta el B:

$$\boldsymbol{\Delta V = V_B - V_A}$$

1.3. CORRIENTE ELÉCTRICA

Una corriente eléctrica es el desplazamiento continuo de cargas eléctricas (electrones o iones), normalmente a través de un **circuito eléctrico.** Debido a que la estructura de los materiales difiere notablemente de unos a otros, no todos los cuerpos permiten el paso de la corriente eléctrica con la misma facilidad; los que menor oposición presentan se denominan **materiales conductores**, destacando entre ellos el oro y la plata, aunque su elevado precio hace que sólo se empleen en aparatos electrónicos de precisión. Los materiales comúnmente empleados como conductores son el cobre y el aluminio, aunque en general **todos los metales** conducen la electricidad. También



El interior de un cable es conductor y el exterior, aislante

conducen la electricidad las sales fundidas o disueltas en agua, ya que dejan libres iones que pueden desplazarse.
Sin embargo, hay muchos otros materiales, llamados **aislantes**, que se oponen casi totalmente al paso de corriente eléctrica. Algunos aislantes son la madera, el plástico, el papel, la porcelana, el vidrio, el aire, los barnices aislantes, etc.
Fíjate en que se ha dicho que estos materiales se oponen ***"casi totalmente"*** al paso de la corriente eléctrica, lo que significa que, aunque no favorezcan el paso de electrones, en ciertas condiciones "especiales", no existen materiales totalmente aislantes. No obstante, se consideran materiales no conductores, o sea, aislantes en condiciones normales.
Algunos materiales no son ni conductores ni aislantes, pero pueden ser lo uno o lo otro dependiendo de las condiciones en las que se encuentren. Estos materiales son los **semiconductores**. Algunos de ellos, como el silicio son esenciales en la fabricación de componentes electrónicos. También son semiconductores el germanio, el galio y muchos compuestos químicos que los contienen.

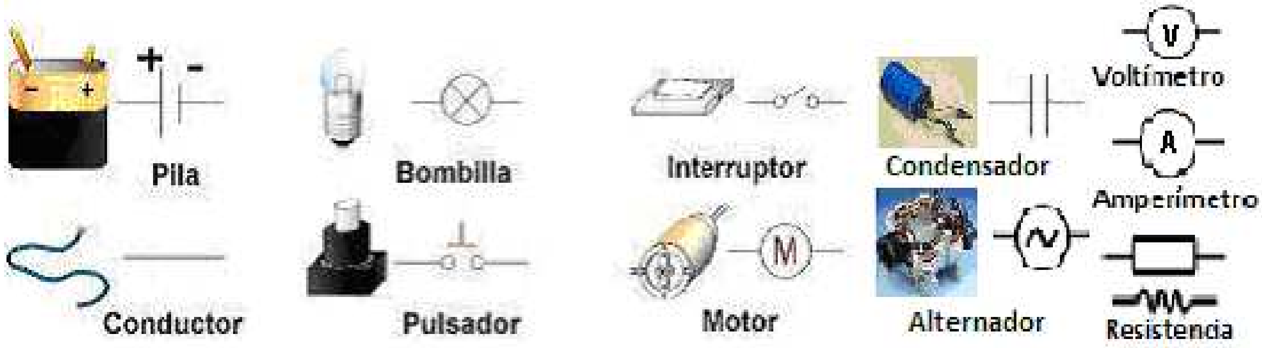
En resumen, son **conductoras** todas las sustancias que tienen cargas eléctricas con libertad para moverse (**cargas libres**) ya sean éstas electrones o iones, mientras que los aislantes, no tienen cargas eléctricas libres.

Para que una corriente eléctrica se mantenga en el tiempo se necesitan estos elementos:

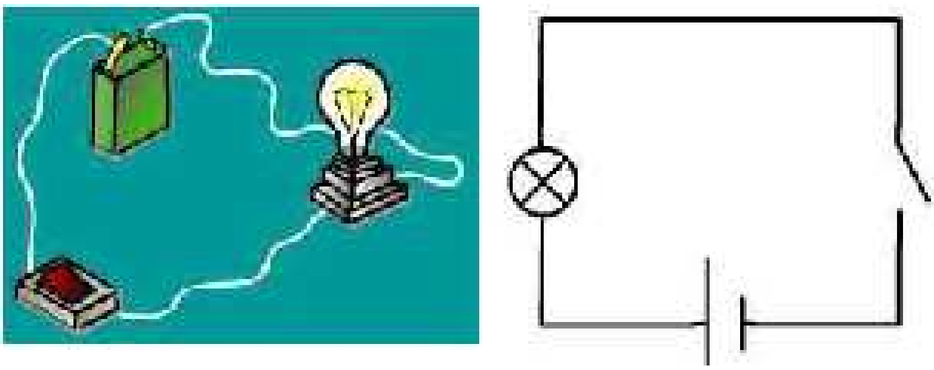
a) Un material **conductor**, que suele ser un hilo de cobre.
b) Un dispositivo que suministre a los electrones la energía necesaria para mantener su movimiento ordenado. Puede ser una pila, una batería, una dinamo o un alternador y, en general, recibe el nombre de **generador**.
c) Un dispositivo **receptor,** que convierta la energía eléctrica (la que tienen los electrones en su movimiento) en otro tipo de energía. Puede ser una bombilla (convierte la energía eléctrica en luminosa), un timbre (convierte la energía eléctrica en sonora), un motor (convierte la energía eléctrica en mecánica) o una estufa eléctrica (convierte la energía eléctrica en calor).
d) **Elementos de control y de protección** que, aunque no son imprescindibles, suelen estar presentes. El más simple de estos elementos es el interruptor.

Estos cuatro elementos básicos, convenientemente conectados, forman un **circuito eléctrico**, por el que puede circular la **corriente eléctrica**, que puede ser **continua** (CC) o **alterna** (CA). En la primera, los electrones circulan siempre en el mismo sentido, mientras que en la alterna cambian constantemente su sentido de circulación. La corriente continua puede producirse aprovechando reacciones químicas (pilas o baterías), energía mecánica (dinamos) o solar (células fotovoltaicas); la corriente alterna se obtiene a partir de energía mecánica con alternadores. El uso de un tipo u otro de corriente eléctrica depende del tipo de receptor, aunque la mayoría de los aparatos que contienen circuitos electrónicos (TV, radios, ordenadores, etc.) necesitan corriente continua. Como la corriente que llega a los enchufes de las viviendas es alterna (porque es más fácil de obtener y transportar), no podemos enchufar directamente a ellos los aparatos electrónicos; por ello hay que enchufarlos a una **fuente de alimentación**, que es un dispositivo que convierte la corriente alterna en continua. La fuente de alimentación puede estar incorporada en el

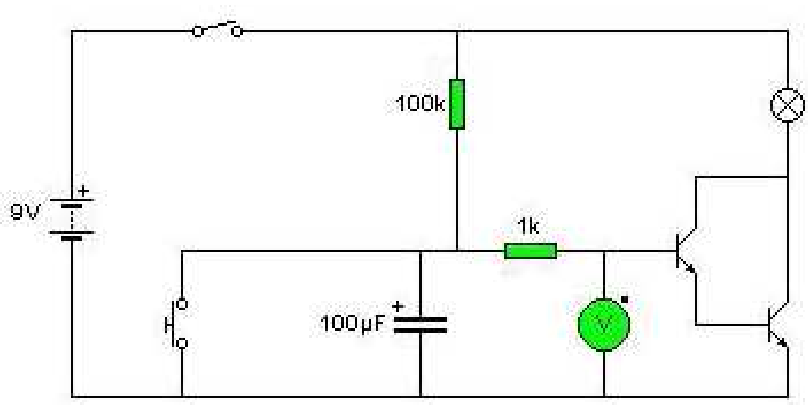
propio aparato electrónico (como en TV o radios) o ser externa, recibiendo en este caso nombres diversos, como transformador, cargador, alimentador o convertidor.
Para realizar un circuito eléctrico y que éste haga la función que se busca, es conveniente hacer una representación o esquema más o menos normalizado que permita ser analizado de forma lógica. Por ello, los profesionales de la electricidad utilizan una serie esquemas y símbolos que puedan ser fácilmente identificables. Estos son algunos de los símbolos utilizados habitualmente para los diferentes elementos de un circuito:



Con estos símbolos, el circuito anterior se representaría así:

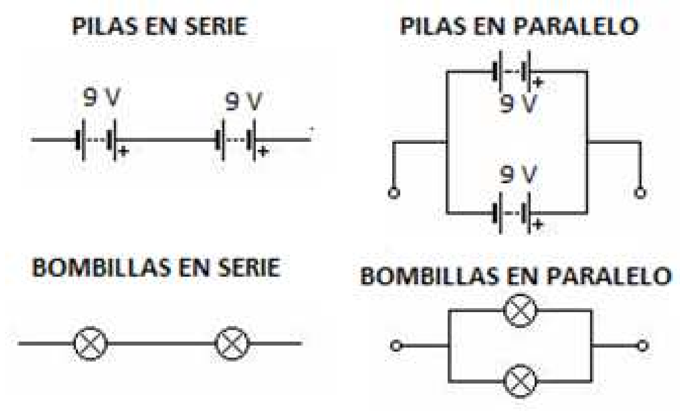


Si se pretende dibujar un circuito eléctrico más complejo, como el de una vivienda, hay que incluir decenas de bombillas, motores, enchufes, cables,..., por lo que el resultado puede ser bastante más complicado. Normalmente se incluye en el esquema una serie de valores característicos junto a los símbolos de los componentes:



Por complicado que pueda llegar a ser un circuito eléctrico, cada dos componentes sólo pueden conectarse en **serie** (si un componente se pone detrás del otro) o en **paralelo** (si se conectan por sus extremos).

Según lo que se quiera conseguir con la conexión, se debe emplear una conexión en serie o una en paralelo.

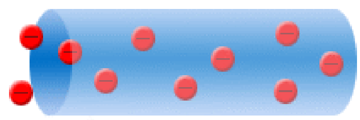


Las pilas en serie suministran más voltaje al circuito, pero no aumentan su duración; en paralelo, suministran el mismo voltaje que una pila, pero aumentan la duración de las pilas.

Las bombillas en serie lucen menos que en paralelo, ya que por ellas pasa la misma intensidad y reparten el voltaje. En paralelo tienen el mismo voltaje, pero reparten la intensidad, por lo que cada bombilla luce igual que si estuviera sola.

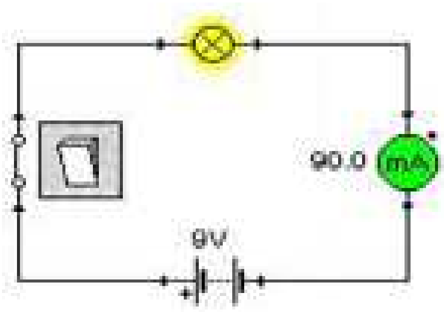
1.4. MAGNITUDES EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO. LEY DE OHM

La carga eléctrica que se mueve en un circuito es la que transportan los electrones que, como tienen carga negativa, se mueven desde el polo negativo del generador hacia el polo positivo. **Sin embargo, por convenio**, costumbre y tradición, se considera que la corriente eléctrica circula en sentido contrario, es decir, sale del polo positivo del generador y entra en él por el polo negativo; es como si se supusiera que lo que realmente se mueve por el circuito son cargas positivas.



La primera característica que define una corriente eléctrica es la cantidad de cargas eléctricas que se mueven por el circuito en un determinado tiempo, es decir, **la intensidad** de la corriente:

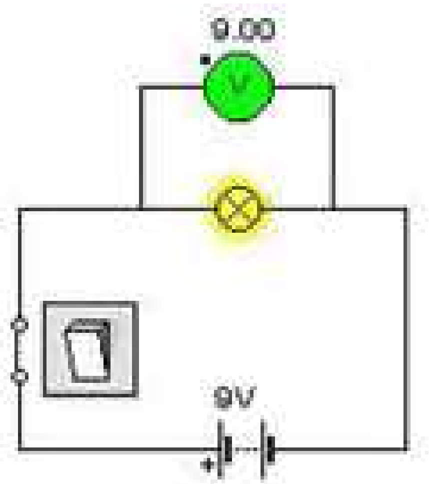
$$I = \frac{Q}{t}$$



La unidad de intensidad de corriente eléctrica es el **amperio** (**A**), que corresponde a la intensidad que atraviesa un circuito por el que pasa un culombio cada segundo; como es una intensidad muy grande, suelen usarse submúltiplos, como el miliamperio (mA).
La intensidad de corriente eléctrica se mide con un aparato llamado **amperímetro**, que siempre debe instalarse **en serie** en el circuito, para así garantizar que todas las cargas eléctricas que se mueven en el circuito pasan por él.

Por otro lado, el movimiento de las cargas eléctricas a lo largo de un circuito se debe a la existencia de una **diferencia de potencial eléctrico** (ddp o V) entre dos puntos del mismo. Representa el trabajo que realiza la unidad de carga positiva al moverse entre dichos puntos. Pero, para mantener esta ddp a lo largo del tiempo, es necesario un consumo equivalente de energía (E) en el generador del circuito, ya que las cargas eléctricas retornan a este elemento, por lo que:

$$V = \frac{E}{Q}$$



La **diferencia de potencial eléctrico** (también llamada tensión, voltaje o caída de tensión) **se mide en voltios**, es decir, la misma unidad que el potencial eléctrico. Entre dos puntos de un circuito hay una diferencia de potencial de un voltio, cuando una carga positiva de un culombio realiza un trabajo de un julio al desplazarse entre estos dos puntos.

Los aparatos que miden la ddp se llaman **voltímetros** y siempre se deben instalar **en paralelo**.

Finalmente, los electrones encontrarán a su paso por el conductor una oposición o **resistencia eléctrica**, debida, entre otros factores, a los choques con átomos del material o a la atracción de éstos. Experimentalmente se encuentra que esta resistencia, $\boldsymbol{R}$, depende del tipo de material, de la longitud de éste y de la sección del mismo:

$$\boldsymbol{R = \rho \cdot \frac{L}{S}}$$

En la anterior expresión $\boldsymbol{\rho}$ es la resistividad específica, que es propia de cada material, $\boldsymbol{L}$ la longitud del conductor y $\boldsymbol{S}$ su sección o área.
La resistencia se mide en una unidad llamada **ohmio** (que se simboliza con la letra griega omega mayúscula, Ω). El aparato empleado para medirla se llama ohmímetro, que debe montarse en paralelo con el dispositivo cuya resistencia queremos medir (eso sí, sin que esté circulando por él la corriente eléctrica).

Hay unos dispositivos, llamados resistencias o resistores, fabricados expresamente para que presenten cierta resistencia eléctrica y así poder realizar una función específica dentro de un circuito. En ellos, las franjas de colores son un código que indica el valor de su resistencia.

Para medir todas las magnitudes anteriores se utiliza un instrumento llamado **polímetro**, que puede usarse de diferentes formas como un voltímetro, un amperímetro o un ohmímetro. También se le conoce como *multímetro* o *téster*.

Polímetro digital Polímetro analógico

Las magnitudes eléctricas de un circuito no son independientes unas de otras. Se puede comprobar experimentalmente que, para la mayoría de los materiales conductores, al aumentar la resistencia eléctrica entre dos puntos de un circuito eléctrico, es necesaria más energía para mover las cargas eléctricas entre estos puntos y, por tanto, será mayor la ddp entre los mismos. Esto queda reflejado en la llamada **ley de Ohm**, que matemáticamente se expresa así:

$$\boldsymbol{V = I \cdot R}$$

1.5. ENERGÍA Y POTENCIA ELÉCTRICA

A partir de la definición de diferencia de potencial entre dos puntos, $\boldsymbol{V}$, la energía o trabajo realizado para mover una carga eléctrica, $\boldsymbol{Q}$, entre dos puntos de un circuito es $\boldsymbol{E = Q \cdot V}$. A su vez, con una intensidad de corriente $\boldsymbol{I}$, la carga que pasa por el circuito en un tiempo $\boldsymbol{t}$ será $\boldsymbol{Q = I \cdot t}$, por lo que, sustituyendo este valor en la anterior ecuación, nos quedará que la **energía consumida** en un circuito eléctrico es:

$$\boldsymbol{E = I \cdot t \cdot V}$$

La **potencia** es también una magnitud de gran importancia, ya que mide la velocidad con la que en el proceso considerado se consume (o produce) energía:

$$\boldsymbol{P = \frac{E}{t}}$$

La unidad de potencia en el SI es el vatio (W), aunque se emplea con mucha frecuencia su múltiplo, el kilovatio (1 kW = 1000 W).
La **potencia eléctrica** es la energía por unidad de tiempo que debe proporcionar el generador de un circuito para que los electrones se muevan por él y, por tanto, coincidirá con la velocidad con la que el circuito consume energía:

$$\boldsymbol{P = I \cdot V}$$

La cantidad de **energía consumida por un aparato eléctrico** dependerá de la potencia de dicho aparato y del tiempo que esté funcionando:

$$\boldsymbol{E = P \cdot t}$$

Si la potencia viene expresada en *vatios* y el tiempo en *segundos*, la energía viene dada en julios (J). Sin embargo, la **unidad comercial de energía eléctrica** que más se usa en la vida cotidiana (por ejemplo, en la factura de la electricidad) es el **kilovatio-hora (kwh)**, que es la energía que consume un aparato de un kilovatio de potencia $(1.000\ W)$ que funciona durante una hora $(3.600\ s)$, es decir, $1kWh = 1.000\ W \times 3.600\ s = 3.600.000\ J$.

Todos los elementos de un circuito presentan cierta resistencia al paso de la corriente, por lo que una parte de la energía eléctrica se transformará en calor y estos aparatos se calentarán. El calor producido dependerá de la energía consumida para mover los electrones entre los extremos de esa parte del circuito ($\boldsymbol{E = I \cdot t \cdot V}$), por lo que, aplicando la ley de Ohm ($\boldsymbol{V = I \cdot R}$), puede calcularse así:

$$\boldsymbol{E = I^2 \cdot R \cdot t}$$

Es decir, el *calor producido* será mayor a medida que aumenten la *intensidad* de la corriente, la *resistencia* y, lógicamente, el *tiempo* de funcionamiento.

Para facilitar el uso de las fórmulas de este último apartado, en el siguiente cuadro quedan resumidas las más importantes. Ten en cuenta que la mayoría están relacionadas, por lo es recomendable que las deduzcas tú a partir de las definiciones:

RESUMEN DE FÓRMULAS SOBRE CORRIENTE ELÉCTRICA			
Magnitud	**Cálculo**	**Unidad S.I**	**Otras unidades**
Intensidad	$\boldsymbol{I = \frac{Q}{t}}$	amperio (A)	mA
Diferencia de potencial	$\boldsymbol{V = \frac{E}{Q}}$	voltio (V)	mV, kV
Resistencia	$\boldsymbol{R = \rho \cdot \frac{L}{S}}$	ohmio (Ω)	kΩ
Potencia	$\boldsymbol{P = \frac{E}{t}}$	vatio (W)	mW, kW, MW
Energía consumida	$\boldsymbol{E = I \cdot t \cdot V}$	julio (J)	kJ, kWh

Ley de Ohm
$\boldsymbol{V = I \cdot R}$

Ejercicio resuelto: calcular la resistencia eléctrica y la intensidad que circula por una estufa eléctrica de 700 vatios enchufada a una toma de 220 voltios, así como la energía que consume funcionando 3 horas.

Solución: *a partir del dato de potencia y voltaje, se puede calcular la intensidad que pasa por la estufa; con ésta se obtiene la resistencia aplicando la ley de Ohm. En estos problemas, escribiendo todos los datos en unidades del sistema internacional, los valores calculados se obtienen en unidades del sistema internacional, evitando posibles errores.*

Datos

$R = ?$
$I = ?$
$E = ?$
$P = 700W$
$V = 220V$
$t = 3\ h$
$t = 3 \times 3600\ s = 10.800\ s$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{I \cdot \cancel{t} \cdot V}{\cancel{t}} \rightarrow P = I \cdot V \rightarrow \boldsymbol{I} = \frac{P}{V} = \frac{700}{220} A \cong \boldsymbol{3,18A}$$

$$V = I \cdot R \rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{V}{I} = \frac{220}{3,18} \Omega \cong \boldsymbol{69,14\Omega}$$

$$\boldsymbol{E} = P \cdot t = 700 \times 10.800J = \boldsymbol{7.560.000J}$$

En unidades comerciales, esta energía consumida se calcularía con la misma fórmula, pero expresando la potencia en kW (700W=0,7kW) y el tiempo en horas:

$$\boldsymbol{E} = P \cdot t = 0,7kW \times 3h = \boldsymbol{2,1kWh}$$

Teniendo en cuenta que, con impuestos incluidos, el kWh sale a unos 0,20 €, tener la estufa enchufada 3 horas costaría aproximadamente 0,42 € (en un mes haciendo lo mismo serían 12,60 €, aproximadamente).

1.6. NORMAS DE SEGURIDAD EN EL USO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La electricidad es de gran utilidad para el ser humano pero, a la vez, puede resultar muy peligrosa. La corriente que se utiliza a diario tiene normalmente una tensión de 220 V. Si se produce una **descarga eléctrica** a través de nuestro cuerpo, nos puede ocasionar **quemaduras** e incluso un paro cardiaco.
Hay que tener en cuenta que la corriente eléctrica trata de ir a "tierra" y para ello busca el camino que le ofrezca menos resistencia. Nuestro cuerpo es un buen conductor, por lo que si entra en contacto con la corriente, la electricidad encontrará en él un camino fácil para llegar a tierra y más si estamos descalzos o mojados.

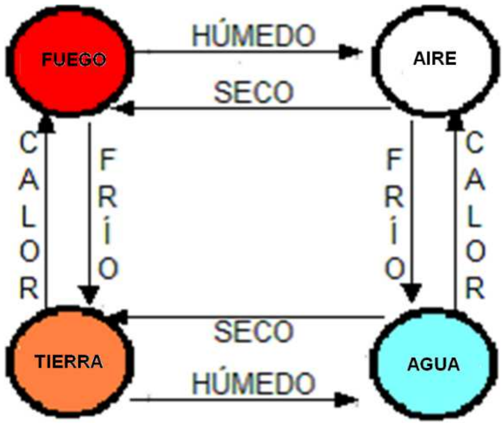
El agua que utilizamos en nuestras casas, al llevar sales disueltas, **es un conductor de la electricidad** por lo que, si nuestro cuerpo o parte de él está mojado, aumenta en gran medida su poder conductor, siendo así más fácil recibir una descarga más intensa y, por tanto, más peligrosa**.** Por eso, debemos tener especial cuidado en no tocar aparatos eléctricos con las manos mojadas, en la ducha o en el baño.

Para evitar accidentes, algunas de las normas básicas de seguridad al manejar aparatos eléctricos son las siguientes:

a) No usar ningún equipo eléctrico cuando se esté mojado o descalzo.
b) No dejar conectados aparatos que puedan recalentarse, pues podrían salir ardiendo y provocar un incendio.
c) No introducir objetos extraños en los enchufes.
d) No tirar nunca del cable para desenchufar.
e) Evitar usar el mismo enchufe para que muchos aparatos funcionen a la vez.
f) Desconectar la electricidad antes de empezar a manipular o realizar algún trabajo relacionado con aparatos eléctricos, cables, enchufes,…
g) No debe haber cables eléctricos por debajo de alfombras o que crucen una puerta.
h) Durante las tormentas, hay que evitar el uso de aparatos eléctricos, ya que son situaciones con un importante riesgo de descarga eléctrica, sobre todo si nos encontramos al aire libre. También hay que procurar estar fuera del agua y no acercarse a postes o árboles, pues pueden captar las descargas eléctricas al actuar como pararrayos.
i) No tocar cables eléctricos caídos, si no se está absolutamente seguro de que están desconectados.
j) En caso de que, circulando con el coche, caiga un cable eléctrico lo mejor es quedarse en el interior, aunque si no hay más remedio que salir, hay que hacerlo sin tocar el coche y el suelo al mismo tiempo (¡hay que **saltar**!).
k) En caso de incendio de un equipo o aparato eléctrico, hay que tratar de desenchufarlo y usar un extintor adecuado para fuego eléctrico (¡no usar nunca agua!).
l) Si alguna persona sufre un choque eléctrico, lo primero es intentar desconectar la fuente de electricidad que lo ha causado. Hay que evitar inicialmente el contacto con la persona accidentada, ya que se podría recibir también la descarga.
m) En caso accidente, puede ser conveniente llamar al teléfono único de emergencias:112

2. TEORÍA ATÓMICA DE LA MATERIA

Comprender cómo es la materia y el porqué de su comportamiento ha sido siempre un tema de interés para la especie humana, ya que tiene una faceta práctica que consiste en poder manejar y modificar las sustancias para poder fabricar diferentes materiales. Ejemplos de ello son el desarrollo de las técnicas de conservación de alimentos, la metalurgia, la obtención de esencias y perfumes o incluso los métodos de embalsamamiento y momificación.
Por tanto, no debe extrañarnos que desde la antigüedad se haya tratado de proponer diferentes explicaciones de cómo es la materia.
Así, en la Grecia del siglo VI a.C. los grandes filósofos de la época explicaron la naturaleza de la materia aceptando la existencia de **un principio permanente, origen de todo**: Tales de Mileto (624-565 a.C.) propuso que era el agua; Anaxímenes (585-524 a.C.) propuso el aire y Heráclito de Éfeso (540-475 a.C.) creyó que sería el fuego.
Finalmente, Empédocles de Agriento (500-430 a.C.) reunió las ideas de sus antecesores y desarrolló una nueva teoría, añadiendo la Tierra como un nuevo principio. Es la llamada **teoría de los cuatro elementos**, que ya no sugiere la existencia de un principio único, sino que plantea la posibilidad de que los cuatro elementos (**agua, aire, fuego y tierra**) mediante dos cualidades (**calor y sequedad**) y sus contrapuestas (**frío y humedad**) darían lugar a todas las formas de materia que nos rodea.



En realidad, los cuatro elementos no eran más que la generalización y representación de la observación cotidiana, pues un cuerpo es sólido (“tierra”), líquido (“agua”) o gaseoso (“aire”), o bien se encuentra en estado de incandescencia (“fuego”).
La teoría de los cuatro elementos fue aceptada por **Aristóteles** de Estágira (384-322 a.C.), el más grande pensador griego e infatigable escritor, aunque defendió la existencia de un **quinto elemento, el éte**r, asociado a la invariabilidad; por ello, las estrellas, los planetas y los dioses (por ser considerados todos ellos inmutables e inmortales) estarían formados por éter. Dada la autoridad intelectual de Aristóteles, no es de extrañar que la teoría de los cuatro elementos perdurase casi dos mil años.

Precisamente la atractiva posibilidad de poder extraer y purificar el quinto elemento a partir de materiales terrestres, condujo a una rama hermética del conocimiento llamada **Alquimia** (término que significa “tratado de los metales”), precursora de la actual química. Aunque originalmente la Alquimia recogió el conocimiento práctico para la obtención de todo tipo de sustancias, posteriormente derivó hacia la magia y la superchería, alejándose definitivamente del planteamiento científico que siempre debe estar sometido a continua revisión a través de la experimentación y el razonamiento.
Sin embargo, debe tenerse en cuenta que científicos tan afamados como Newton, Dalton o Lavoisier posiblemente partieron de concepciones alquimistas, ya que en su época el conocimiento de la Naturaleza estaba ligado a esta disciplina. La Alquimia sobrevivió prácticamente durante 2000 años, hasta que fue remplazada por la ciencia moderna en el siglo XIX.
Por la misma época en la que triunfaba en Grecia la teoría de los cuatro elementos, **Leucipo** y su discípulo **Demócrito** de Abdera (460-370 a. J.C.), propusieron la discontinuidad de la materia, formada por **átomos** (partículas indivisibles y eternas) que

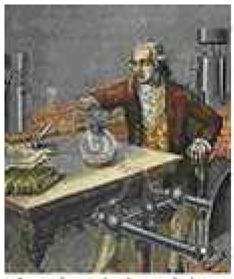
se mueven gracias a la existencia del vacío entre unos y otros. Estos átomos serían todos de la misma naturaleza, pero diferirían en la forma, la magnitud y el orden en que están colocados en el cuerpo.

El atomismo de Demócrito**,** expuesto en forma brillante en el poema "*De Rerum Natura*" del romano Lucrecio, está construido totalmente por conceptos filosóficos. Pese a que sus ideas eran equiparables a las de las teorías modernas, sus seguidores no consiguieron convencer a sus contemporáneos, especialmente porque el conocimiento en la Grecia Clásica despreciaba la experimentación como vía de demostración de las hipótesis. Por todo ello, el atomismo no se vuelve a plantear hasta que lo recupera Boyle en 1677 y lo desarrolla **Dalton en 1803** como resultado de observaciones científicas.

Para comprender mejor la transición al moderno atomismo, hay que tener en cuenta que tradicionalmente la química se había limitado a describir las reacciones químicas que se producían entre las distintas sustancias. En la segunda mitad del siglo XVIII, el químico francés **Antoine de Lavoisier**, comenzó a emplear la balanza para determinar la masa de las sustancias que intervenían en las reacciones químicas. De este modo surgió la **química moderna**, que permitió descubrir las llamadas **leyes de las reacciones químicas** a base de analizar cuidadosamente experimentos de laboratorio repetidos muchas veces. Estas leyes, que se refieren a las cantidades de las sustancias que intervienen en las transformaciones químicas, son las siguientes:

1ª) Conservación de la masa (ley de Lavoisier): en todo proceso químico, la suma de la masa de **todas** las sustancias que intervienen permanece constante en el transcurso de la misma.

Ejemplo: Si quemamos 1 kg de leña, parece que esta ley no se cumple; sin embargo, si sumáramos al kg de leña la cantidad de oxígeno que se gasta al quemarla, coincidiría con la suma de la masa de las cenizas y la del humo producido (¡Ojo, que tiene masa!).



Antoine de Lavoisier

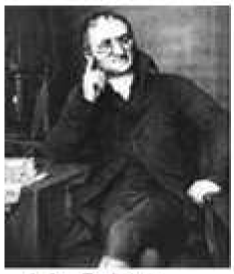
2ª) Proporciones definidas (ley de Proust): cuando dos o más sustancias reaccionan químicamente para dar un determinado producto, siempre lo hacen en una relación en masa constante.

Ejemplo: cuando el oxígeno y el hidrógeno reaccionan para dar agua, siempre lo hacen en una proporción en masa de 8 gramos de oxígeno por cada gramo de hidrógeno.

Joseph Louis Proust

3ª) Proporciones múltiples (ley de Dalton): si dos o más sustancias pueden producir más de un producto de reacción, las proporciones en masa con las que reaccionan guardan relaciones numéricas sencillas (1:2, 2:3, ...).

Ejemplo: siguiendo con el ejemplo del oxígeno y el hidrógeno, resulta que en ciertas condiciones pueden formar agua oxigenada, en cuyo caso, la proporción en masa con la que reaccionan es de 16 gramos de oxígeno por cada gramo de hidrógeno, es decir, ¡justo el doble que cuando se forma agua (proporción 2:1)!



John Dalton

4ª) Volúmenes de combinación (ley de Gay-Lussac): cuando en una reacción química intervienen sustancias en estado gaseoso, los volúmenes que reaccionan de éstas guardan una relación numérica sencilla cuando se miden en las mismas condiciones de presión y temperatura.

Ejemplo: en la reacción del oxígeno con el hidrógeno para dar agua, se observa experimentalmente que por cada litro de oxígeno reaccionan dos litros de hidrógeno (medidos a igual presión y temperatura).

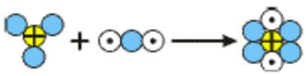
2.1. TEORÍA ATÓMICA DE DALTON

Aunque la teoría atómica moderna se propuso con posterioridad al descubrimiento de las leyes de las reacciones químicas, éstas confirman la teoría atómica y pueden ser perfectamente justificadas mediante ella.
Las leyes de Proust y Lavoisier, así como sus propios estudios sobre los gases, llevaron a Dalton a enunciar su teoría atómica, que se basa en cuatro postulados:

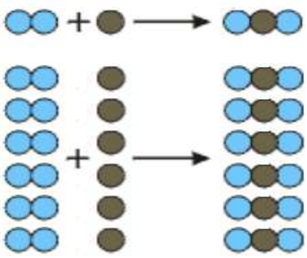
1. Los elementos químicos están formados por partículas indivisibles llamadas átomos.
2. Todos los átomos de un elemento son iguales entre sí, tienen la misma forma, tamaño, masa y cualquier otra propiedad.
3. Los átomos de elementos diferentes son distintos y tienen distintas propiedades
4. En una reacción química **los átomos** se unen entre sí de forma diferente, pero en el proceso mantienen su identidad (ni se rompen, ni se destruyen).

Esta teoría permitió a Dalton explicar las leyes de las reacciones químicas:

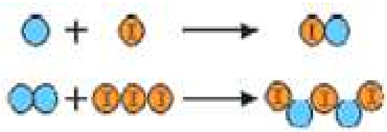
- Ley de conservación de la masa: puesto que los átomos son indestructibles, en una reacción química el número y la clase de los átomos será la misma, tanto antes como después de la reacción, por lo que la masa no se modificará.



- Ley de las proporciones definidas: suponiendo que los elementos A y B reaccionan entre sí, de forma que cada átomo del elemento B se une a dos átomos del elemento A, dando lugar a la sustancia A_2B, si hubiera 10 átomos de A, serían necesarios 5 de B y, por tanto, la proporción en masa de las cantidades que reaccionan de los elementos A y B siempre será la que hay entre la masa de dos átomos de A y la de uno de B.



- Ley de las proporciones múltiples: supongamos que los elementos A y B pueden formar dos compuestos diferentes, por ejemplo, AB y A_2B_3. En el primero se une cada átomo de A con un átomo de B, mientras que en el segundo se unen dos átomos de A con cada tres de B. De este modo, si hubiera seis átomos de A y otros seis de B, los 6 átomos de A se unirían a los 6 átomos de B en caso de formarse la primera sustancia, pero cuando se forme la segunda sustancia, los seis átomos de B se unirían con cuatro de A (y sobrarían dos de A). Por tanto, la proporción en masas que reaccionan de estas sustancias guardará una relación de números naturales sencillos (3:2 o 6:4), la misma que entre el número de átomos que intervienen.

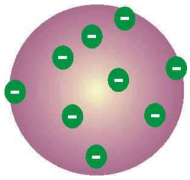


- Ley de volúmenes de combinación: para justificarla hay que admitir la **hipótesis de Avogadro**, que afirma que cierto volumen de cualquier gas, independientemente de la sustancia que lo forma, contiene el mismo número de moléculas, si se mide a la misma temperatura y a la misma presión. Esto supone que el tamaño de las moléculas es extremadamente pequeño, por lo que el espacio que ocupan es prácticamente despreciable frente al volumen del gas. Por tanto, para cierto volumen de gas, no importa qué moléculas lo están ocupando. De todo ello se deduce que, cuando intervienen gases en una reacción química, como tienen que hacerlo en una proporción de átomos fija, la relación en volúmenes también lo será.

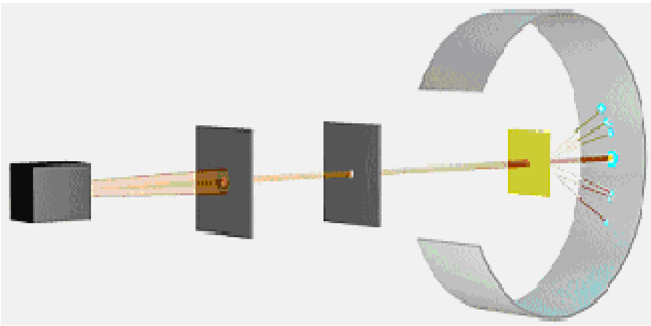
La teoría atómica de Dalton se fue confirmando a lo largo del siglo XIX y permitió identificar y caracterizar muchas sustancias desconocidas hasta entonces, de modo que parecía que se había conseguido dar una explicación correcta de cómo es la materia. Sin embargo, el descubrimiento del electrón a finales del siglo XIX, iba en contra de la teoría atómica, ya que demostraba que los átomos no eran indivisibles. Aunque se les siguió llamando ***átomos***, era preciso conocer algo más sobre ellos, y se elaboraron nuevas teorías que permitieran explicar los hechos observados en el comportamiento de la materia.

2.2. MODELOS ATÓMICOS

El descubridor de los electrones, **J.J. Thomson**, propuso un primer modelo de átomo con partículas en su interior, suponiendo una estructura atómica similar a la de un pastel con pasas, en el que el átomo sería como una esfera esponjosa con carga positiva en la que se incrustarían los electrones, tantos como fueran necesarios para compensar su carga y que el átomo resultara eléctricamente neutro.

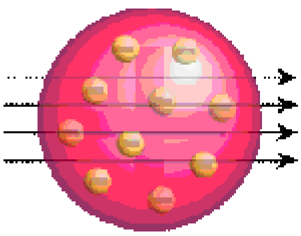


Ernest Rutherford puso a prueba este modelo realizando una serie de experimentos en los que bombardeaba una lámina muy delgada de oro con partículas α ("alfa"), que tienen carga positiva y son radiactivas (hoy sabemos que son núcleos de helio). Si el modelo atómico de Thomson se correspondía con la realidad, las partículas α atravesarían los átomos sin alterar su trayectoria.

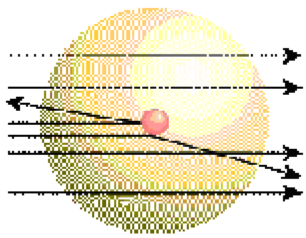


Sin embargo, Rutherford observó que, aunque la mayoría de las partículas α atravesaban la lámina de oro como predecía la teoría, unas pocas rebotaban y salían hacia atrás (una de cada diez mil). Según las palabras del propio Rutherford: "*Es tan sorprendente, como si al disparar balas de 15 pulgadas contra una hoja de papel, algunas rebotasen.*"

Para explicar estos resultados, Rutherford propuso un **modelo atómico nuclear**, consistente en suponer que casi toda la masa y la carga eléctrica positiva de los átomos se concentra en su centro (el **núcleo** del átomo), en un espacio muy pequeño respecto al tamaño total del átomo, y los electrones girarían alrededor (en la **corteza** del átomo), a una gran distancia del núcleo, en número suficiente como para compensar la carga eléctrica positiva de éste. Entre medias no habría nada: ¡la materia estaría prácticamente vacía!



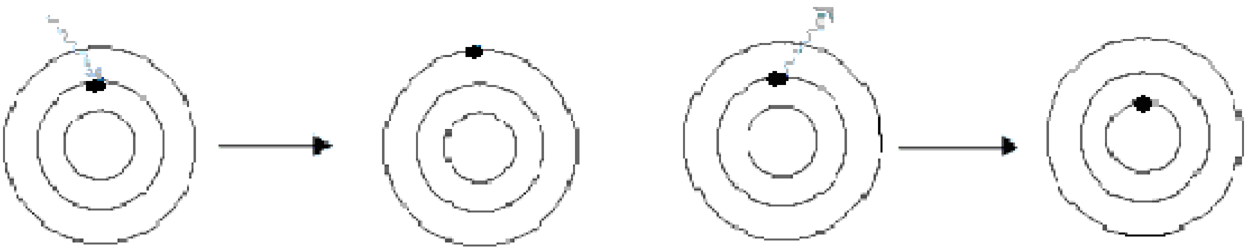
Por tanto, el modelo nuclear de Rutherford considera al átomo como un sistema planetario en miniatura, en el que la posición del núcleo es equivalente a la del sol, y la de los electrones, a la de los planetas. Según los cálculos que se deducen del **experimento de Rutherford** que condujo a este modelo, el átomo tendría un tamaño de unos 10^{-10} metros y el núcleo de 10^{-14} metros (10.000 veces menor). Esto significa que, si un átomo fuera del tamaño de una plaza de toros, sus electrones (del tamaño de cabezas de alfiler) girarían por su periferia y toda su masa se concentraría en una canica situada en el centro de la plaza.



Pese a que el modelo atómico de Rutherford suponía un gran avance en el conocimiento de la constitución de la materia, era incapaz de explicar por qué los átomos se unen entre sí y el comportamiento químico que muestran. Además, los átomos deberían ser inestables, ya que los electrones del modelo atómico de Rutherford deberían ir emitiendo energía y, por tanto, acabarían cayendo sobre el núcleo, cosa que la experiencia demuestra que no ocurre, pues la materia se manifiesta estable. Tampoco podía explicar los **espectros atómicos**, que están relacionados con el color de la luz que emite un elemento químico al ser calentado: a diferencia de lo que ocurre con la luz blanca procedente del sol que, al hacerla pasar a través de un prisma de vidrio, se descompone en bandas continuas de colores (el arco iris), cuando se descompone la luz que desprende un elemento previamente calentado, queda descompuesta en unas pocas líneas de colores que son característicos (espectro atómico, que es como la "huella dactilar" del elemento.

Partiendo del modelo atómico de Rutherford, el físico danés **Niels Bohr** propuso un nuevo modelo atómico que soluciona los problemas del anterior y además explica los espectros atómicos. Se basa en cuatro postulados:

1. El átomo está formado por un **núcleo**, con carga positiva, que contiene la mayor parte de la masa del átomo, y una **corteza** en la que se mueven los electrones. La mayor parte del átomo está formado por espacio vacío. El tamaño del núcleo, que contiene casi toda su masa y toda su carga positiva, es miles de veces menor que el átomo.
2. Los electrones se mueven en **órbitas circulares alrededor del núcleo** atómico, de forma que la fuerza con la que los atrae el núcleo atómico, por atracción electrostática, es igual a la fuerza centrífuga, debida al giro.
3. **Sólo hay ciertas órbitas estables**, en las que los electrones giran alrededor del núcleo sin emitir ni absorber energía espontáneamente.
4. El **paso de un electrón desde una órbita a otra supone la absorción o emisión de radiación**, absorbiendo o emitiendo la radiación justa para pasar de una órbita a otra.



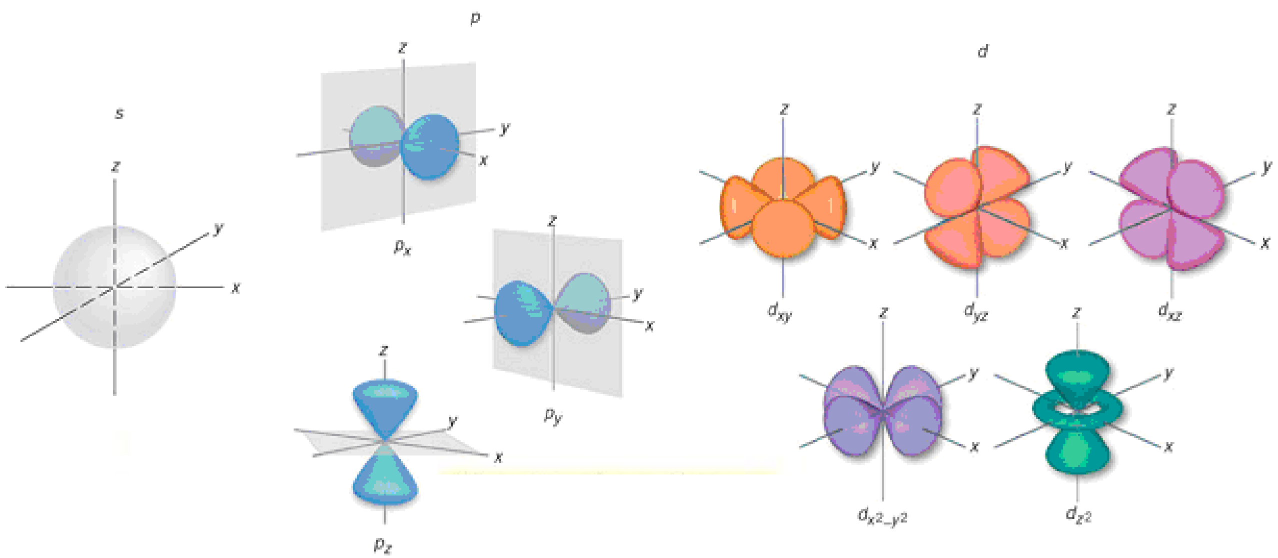
Por tanto, un electrón permanece girando en las órbitas estables sin emitir ni absorber energía, pero para saltar a una órbita más alejada del núcleo, tiene que absorber exactamente la diferencia de energía entre ambas órbitas, y para bajar a una órbita más cercana al núcleo, debe emitir la energía correspondiente a la diferencia de energía entre las órbitas. Esta es la razón de que los espectros atómicos estén formados por líneas discretas, ya que corresponden a las diferencias de energía entre las órbitas de los electrones.

El desarrollo matemático del modelo atómico de Bohr llega a la conclusión de que, para que se alcance la máxima estabilidad, los electrones de los átomos se colocan en diferentes órbitas según una serie de normas:

1. Sólo son posibles determinadas órbitas (los electrones no pueden girar a cualquier distancia del núcleo).
2. El número máximo de electrones que caben en cada órbita viene dado por la expresión $\boldsymbol{2n^2}$, donde $\boldsymbol{n}$ es el número de órbita contada desde el núcleo. Así, en la primera órbita ($n = 1$) caben $2 \cdot 1^2 = 2$ electrones; en la segunda órbita ($n = 2$) caben $2 \cdot 2^2 = 8$ electrones, ...
3. **En la última órbita ocupada nunca puede haber más de ocho electrones** (dos electrones si la primera es la única órbita utilizada), siendo muy estables los átomos que tienen ocho electrones (dos, si sólo se usa la primera órbita), como ocurre en los gases nobles.
4. La experiencia demuestra que los átomos que no tienen ocho electrones en la última órbita utilizada, tienden a conseguirlos, ganando, perdiendo o compartiendo electrones ("regla del octeto").

En definitiva, el **modelo atómico de Bohr justifica** las uniones entre átomos, explica los comportamientos químicos de los mismos y los espectros atómicos.

Aunque posteriormente fue mejorado por el físico alemán **Sommerfeld**, contemplando la posibilidad de órbitas elípticas, seguía siendo un modelo con muchas limitaciones, ya que, por las características de los electrones, no parece que tenga sentido hablar de órbitas para los electrones en su movimiento en un espacio tan pequeño a velocidades muy grandes porque, según el **principio de incertidumbre de Heisenberg**, es imposible conocer simultáneamente y con precisión la velocidad y la posición de una partícula. Por ello se desarrolló el llamado **modelo atómico cuántico o modelo de orbitales**, en el que el electrón está caracterizado por una ecuación llamada **función de ondas**, que describe la **probabilidad** de encontrarlo en un determinado lugar del espacio. Los **orbitales atómicos** son las representaciones gráficas de estas funciones, por lo que son zonas alrededor del núcleo del átomo donde la probabilidad de encontrar al electrón es máxima.
Los orbitales se designan por letras que se refieren a su forma, pudiendo ser esféricos (**s**), bilobulados (**p**), tetralobulados (**d**) o hexalobulados (**f**); en cada nivel varían sus tamaños, pero esta es la representación más habitual de los orbitales **s**, **p** y **d**:



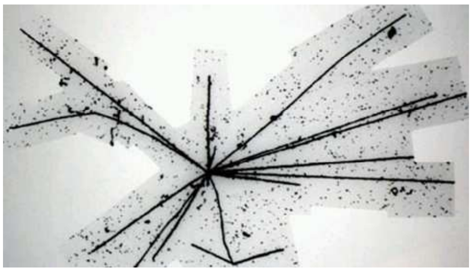
El **modelo de orbitales** amplía y justifica el modelo de Bohr y permite explicar más propiedades de los átomos y sus uniones: justifica plenamente la distribución de los átomos en el Sistema Periódico, la geometría de moléculas, el enlace químico, etc.
En este modelo, los electrones se distribuyen en los diferentes orbitales atómicos, de modo que en cada orbital caben dos electrones con espín opuesto (giro de rotación). En cada nivel energético (equivalente a las órbitas de Bohr) puede haber diferentes tipos de orbitales con formas y tamaños también diferentes. En el nivel 1 sólo hay un orbital esférico (llamado **1s**), en el nivel 2 hay un orbital esférico (llamado **2s**) y tres orbitales bilobulados (llamados orbitales **2p**); en el nivel 3 hay un orbital esférico (**3s**), tres bilobulados (**3p**) y cinco tetralobulados (llamados orbitales **3d**). En el nivel 4 hay un orbital esférico (**4s**), tres bilobulados (**4p**), cinco tetralobulados (**4d**) y siete hexalobulados (**4f**).

La configuración electrónica de un elemento es la distribución de sus electrones en los distintos orbitales (o en las órbitas de Bohr) y permiten deducir el comportamiento químico de un átomo, de modo que son **los electrones de la última órbita o nivel energético ocupado los que determinan este comportamiento**. Por ello se llaman **capa y electrones de valencia**. De esos electrones dependen las propiedades químicas de las sustancias.

Veamos algunos **ejemplos con el modelo de Bohr** (las órbitas o capas se llaman K, L, M, N, ..., respectivamente para la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, ...):

Elemento	**nº de electrones**	**configuración**			
		K	**L**	**M**	**N**
Carbono	6	2	4	--	--
Fósforo	15	2	8	5	--
Argón	18	2	8	8	--
Cinc	30	2	8	18	2
Cloro	17	2	8	7	--

2.3. PARTÍCULAS SUBATÓMICAS



Acelerando protones y electrones a velocidades próximas a las de la luz y haciéndoles colisionar, los físicos han podido determinar más de un centenar de partículas subatómicas: gluones, quarks, mesones π, mesones μ, partículas Σ... son sólo una muestra.
Pero en química, sólo son importantes los **protones**, con carga eléctrica positiva, los **electrones**, con carga eléctrica negativa, y los **neutrones**, sin carga eléctrica.
Sus principales propiedades son estas:

Partícula	Símbolo	Lugar	Carga eléctrica	Masa
Protón	$\boldsymbol{p^+}$	Núcleo	$+1e$	$1u$
Neutrón	$\boldsymbol{n^o}$	Núcleo	0	$1u$
Electrón	$\boldsymbol{e^-}$	Corteza	$-1e$	$\frac{1}{1836}u$

Como estas partículas son muy pequeñas, los datos de la tabla anterior se indican en unidades especiales: para la carga eléctrica se toma, en valor absoluto, la **carga del electrón ($\boldsymbol{1e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ culombios}$)**; para la masa, la unidad de masa atómica, que corresponde, aproximadamente, a la **masa de un protón ($\boldsymbol{1\ u = 1,67 \cdot 10^{-24}\ gramos}$)**, aunque, siendo más precisos, la masa del neutrón es algo mayor que la del protón ($1{,}009u$ y $1{,}007u$, respectivamente).

Para dar información de las partículas que contiene un átomo o especies químicas relacionadas, se suelen usar este tipo de representaciones:

$$\boldsymbol{{}^{A}_{Z}X^{\pm q}}$$

- $\boldsymbol{X}$: **Símbolo del elemento químico** (una o dos letras).
- $\boldsymbol{A}$: **Número másico**: indica el número de partículas que contiene el núcleo del átomo (protones más neutrones). Prácticamente coincide con la masa del átomo, ya que la masa de los protones y neutrones es aproximadamente $1u$, y la de los electrones es casi 2000 veces menor que la de éstos. Se diferencia de la masa atómica en que **nunca lleva decimales**.
- $\boldsymbol{Z}$: **Número atómico**: indica los protones que tiene el núcleo, que coincide con el número de electrones en átomos neutros. Cada elemento queda identificado por su número atómico, de forma que **todos** los átomos de un determinado elemento químico tienen **el mismo número atómico**. Sabiendo el número atómico (Z) y el número másico (A) de un átomo, se puede deducir fácilmente cuántos protones y neutrones tiene este átomo, ya que el número de neutrones (N) será la diferencia entre el número másico y el número atómico:

$$\boldsymbol{N = A - Z}$$

- $\boldsymbol{\pm q}$: **Carga eléctrica** de la especie química (positiva o negativa, medida en e). Si es neutra no se pone nada ($q = 0$ porque coinciden los protones y los electrones), pero en los **iones** (especies químicas en las que faltan o sobran electrones) el signo **positivo de los catione**s indica cuántos electrones faltan, mientras que el signo **negativo de los aniones** indica los electrones que sobran.
  El número de electrones de un ión se calcula restando al número atómico su carga eléctrica (con signo):

$$\boldsymbol{n^{o}\ electrones = Z - q}$$

Ejemplos:

- $\boldsymbol{{}^{27}_{13}Al}$: es un átomo del elemento aluminio (Al), cuyo número atómico (Z) es 13 y cuyo número másico (A) es igual a 27. De aquí podemos deducir que en su núcleo hay *13 protones* y *14* neutrones (27-13). Además, si este átomo es eléctricamente neutro tendrá también *13 electrones.*

- $\boldsymbol{{}^{31}_{15}P^{-3}}$: es un anión (con 3 cargas negativas) del elemento fósforo (P), cuyo número atómico (Z) es 15 y cuyo número másico (A) es igual a 31. De aquí podemos deducir que en su núcleo hay *15 protones* y *16* neutrones ($31 - 15$). Como esta especie tiene tres cargas negativas, tendrá en la corteza tres electrones de más que protones, es decir, 18 electrones.

Los átomos de elementos distintos se diferencian en que tienen distinto número de protones en el núcleo (distinto Z). Pero, aunque todos los átomos de un mismo elemento tienen el mismo número de protones en el núcleo (igual Z), no tienen por qué ser exactamente iguales, ya que pueden tener distinto número de neutrones (distinto A).

Se denomina **isótopos** a los átomos de un mismo elemento (igual Z) que tienen diferente número de neutrones (distinto A).

La palabra **isótopos** hace referencia a **átomos que ocupan el mismo puesto en el sistema periódico de los elementos**, ya que ésta ordena los elementos químicos en orden creciente de sus números atómicos.
Ejemplo: el número atómico del carbono es $Z = 6$, por lo que tiene seis protones y seis electrones. La mayoría de los átomos de carbono tienen 6 neutrones, pero se han encontrado átomos de carbono con un número de neutrones distinto:

ISÓTOPO	Z	A	p^+	n^o	e^-
Carbono-12	6	12	6	6	6
Carbono-13	6	13	6	7	6
Carbono-14	6	14	6	8	6

El carbono-13 es muy importante en medicina, ya que se emplea en algunas técnicas de diagnóstico; el carbono-14 se usa para conocer la antigüedad de los objetos históricos o prehistóricos, por lo que tiene mucho uso en arqueología.

Los isótopos de un elemento químico tienen idénticas propiedades químicas y sólo se diferencian en que unos son un poco más pesados que otros. Sin embargo, debido a que sus núcleos son diferentes, algunos isótopos pueden desintegrarse espontáneamente emitiendo energía. Son los llamados **isótopos radiactivos**.
La **radiactividad** es una propiedad de isótopos “inestables”, cuyos núcleos emiten partículas y radiaciones hasta que se estabilizan, pudiendo así llegar a convertirse en núcleos de otros elementos, más ligeros. Las emisiones más comunes pueden ser:

- **Radiación alfa, α**: son partículas poco penetrantes formadas por dos neutrones y dos protones (núcleos de helio, ${}_{2}^{4}He^{+2}$).
- **Radiación beta, β:** son electrones que se desplazan a gran velocidad y tienen mayor poder de penetración que las α, pudiendo atravesar láminas de aluminio de algunos milímetros de espesor.
- **Rayos gamma, γ**: son ondas electromagnéticas de gran energía y un gran poder de penetración. Para detenerlas se necesitan gruesas capas de plomo u hormigón.

Aplicaciones de los isótopos radiactivos:

- En medicina se usan en diagnóstico clínico (rayos gamma) y con fines terapéuticos (para destruir células dañadas). Aunque en diagnóstico se aplica una menor cantidad de radiación, en ambos usos esta cantidad debe ser controlada para evitar el daño a células y a tejidos sanos. En **diagnóstico** se usa el **yodo-123** y el **tecnecio-99**, mientras que en terapias contra el cáncer los más usados son el **cobalto-60** y el **yodo-131**.
- En arqueología y paleontología se usa el **carbono-14** para datar restos orgánicos, ya que conociendo la proporción de este isótopo del carbono es posible calcular con bastante precisión su antigüedad.
- En Industria el **uranio-235** se usa para producir electricidad en centrales, a pesar de los riesgos por posibles accidentes y por los residuos generados, también radiactivos, que pueden permanecer en el medioambiente durante milenios.

2.4. PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS QUÍMICOS

Además de sus nombres completos, los elementos químicos se representan mediante **símbolos químicos**, la mayoría de los cuales derivan de las letras del nombre en latín del elemento. La primera letra del símbolo se escribe con mayúscula, y la segunda (si la hay) con minúscula. Los símbolos de algunos elementos conocidos desde la antigüedad, proceden normalmente de sus nombres en latín, como Cu de *cuprum* (cobre), Ag de *argentum* (plata), Au de *aurum* (oro) y Fe de *ferrum* (hierro). Este conjunto de símbolos que denomina a los elementos químicos es universal. Algunos elementos frecuentes y sus símbolos son: carbono (C), oxígeno (O), nitrógeno (N), hidrógeno (H), cloro (Cl), azufre (S), magnesio (Mg), aluminio (Al), cobre (Cu), argón (Ar), oro (Au), plata (Ag), hierro (Fe).

La **tabla periódica** o **sistema periódico** de los elementos es un modo de clasificar todos los elementos químicos según sus propiedades y también según su configuración electrónica, ya que ambas están muy relacionadas. Está organizada en 7 filas horizontales (llamadas **períodos**) y 18 columnas verticales (llamadas **grupos**), de modo que los elementos con propiedades químicas semejantes, se encuentren situados cerca uno de otro.

	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII			IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	H																	He
2	Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
3	Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6	Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7	Fr	Ra	Ac	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og

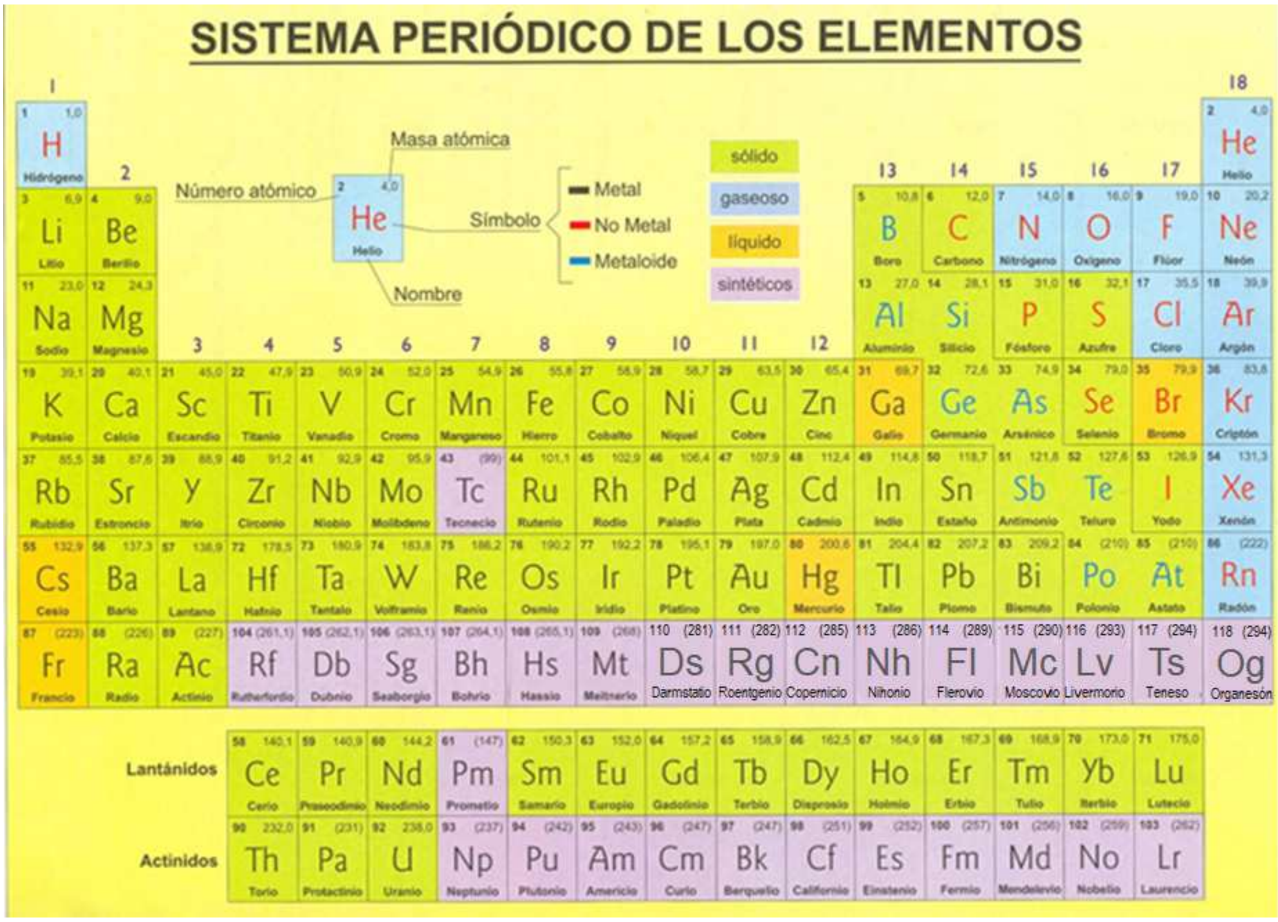
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

El orden de los elementos en la tabla viene dado por su número atómico, Z, que aumenta en cada período de izquierda a derecha, continuando en el siguiente período. Como Z es el número de protones del elemento, coincide en átomos neutros con el número de electrones, por lo que, en última instancia, la configuración electrónica de los elementos es la que ordena la tabla periódica.

No todos los períodos y grupos de la tabla periódica contienen el mismo número de elementos. Así, el primer periodo tiene sólo ***dos*** elementos, el segundo y tercer periodos tienen ***ocho*** elementos, el cuarto y quinto periodos tienen ***dieciocho***, el sexto y séptimo periodos tienen ***treinta y dos*** elementos (la mayoría de los del séptimo período se han fabricado en laboratorios y son inestables). Las dos filas que aparecen debajo de la tabla, cada una con ***catorce*** elementos, corresponden a los dos últimos periodos; se representan así para no alargar demasiado la tabla y facilitar el uso de ella.

El periodo que ocupa un elemento **coincide con la última capa electrónica que utiliza** para colocar sus electrones. Por tanto, un elemento que utiliza ***cinco*** capas electrónicas, estará en el ***quinto periodo***.

El grupo que ocupa un elemento **está relacionado con el número de electrones que tiene en su última o últimas capas electrónicas**, por lo que todos los elementos de un mismo grupo tienen **propiedades químicas similares**.
Los grupos de la tabla periódica están **numerados desde el número 1 al 18**, aunque todavía se utiliza la representación tradicional en la que se designan con números romanos (del I al VII, con la serie A de elementos representativos, y la B de elementos de transición). Los elementos situados en las dos filas fuera de la tabla pertenecen al **grupo 3** y son elementos de transición interna, también conocidos como tierras raras.



Según la regla del octeto, los átomos tienden a tener en su última capa ocho electrones, pero sólo unos pocos tienen esta configuración electrónica: los ***gases nobles o inertes***, entre los que también está el helio (He), que tiene completa con dos electrones la primera capa, que es la única que utiliza. Se llaman así porque no reaccionan con otros elementos y siempre aparecen como átomos aislados.
Los metales son elementos químicos que en su última capa electrónica tienen pocos electrones (en general, 1 o 2), por lo que tienen tendencia a perderlos. De este modo, quedan cargados positivamente y se convierten en ***iones positivos* (*cationes)***. La mayoría de los elementos químicos son metales: el **hierro (Fe)**, que tiene dos electrones en su última capa (la cuarta); el **sodio (Na)**, con un electrón en su última capa (la tercera), el **cobre (Cu)**, con dos electrones en la última capa (la cuarta) o el **oro (Au)**, con dos electrones en la última capa (la sexta).
Las principales propiedades de los metales son:

- Casi todos son sólidos a temperatura ambiente (excepto el mercurio, Hg, que es líquido).
- Son buenos conductores del calor y de la electricidad.

Los no metales son elementos químicos que en su última capa casi tienen 8 electrones, por lo que tienden a quitar electrones a otros átomos, consiguiendo así completar con 8 electrones su última capa electrónica. De este modo, quedan cargados negativamente y se convierten en ***iones negativos*** **(*aniones*)**. Son no metales **el nitrógeno (N)**, con cinco electrones en su última capa (la segunda), el **oxígeno (O)**, con seis electrones en su última capa (la segunda), el **flúor (F)**, con siete electrones en su última capa (la segunda), el **cloro (Cl)**, con siete electrones en su última capa (la tercera) o el **fósforo (P)**, con cinco electrones en su última capa (la tercera).
Las principales propiedades de los no metales son:

- La mayoría son líquidos o gases a temperatura ambiente.
- Son malos conductores del calor y de la electricidad.

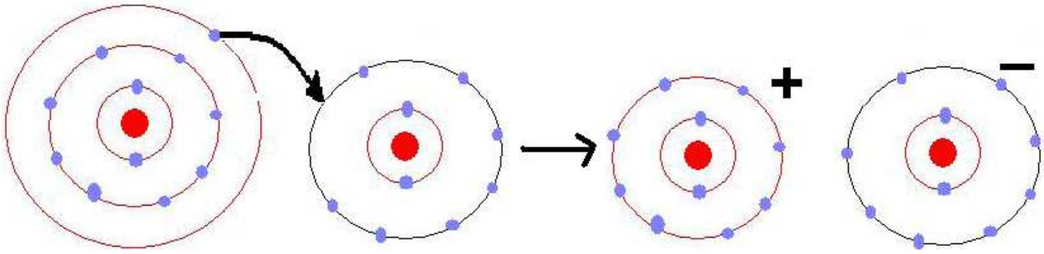
Los **metales** están situados **a la izquierda** de la tabla periódica, mientras que los **no metales** están **a la derecha** de la misma.

En la dirección https://ptable.com/#Propiedades/Serie puedes acceder a una tabla periódica con datos de todos los elementos.

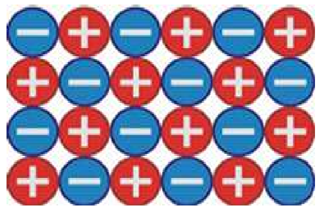
2.5. ENLACE QUÍMICO

Salvo en el caso de los gases nobles, cuyos átomos permanecen normalmente aislados, los átomos de los elementos tienden a unirse unos a otros para formar **moléculas**. De esta manera se construyen todas las sustancias: agua, madera, metales,...
Los átomos de los elementos tienden a rodearse de **ocho electrones** en su capa o **nivel más externo** para adquirir la máxima estabilidad. Este comportamiento se conoce como **regla del octeto**.
Los átomos de los elementos pueden **ganar**, **perder** o **compartir** electrones para alcanzar los **ocho electrones en su última capa** (o sólo dos si su nivel más externo es el primero). Esto es lo que hace que los átomos tiendan a unirse entre sí, produciéndose el llamado **enlace químico**, que puede producirse de diferentes formas, según las características de los átomos que se unen, siendo los enlaces más característicos el iónico, el covalente y el metálico.

Enlace iónico: se produce **entre metales y no metales**, ya que los metales tienen tendencia a perder electrones (su última capa tiene muy pocos electrones), mientras que los no metales tienen tendencia a capturarlos. Cuando un átomo de un metal y el de un no metal se acercan, el átomo del metal cederá uno o varios electrones al átomo no metálico, formándose los correspondientes iones (**catión metálico y anión no metálico**) que, por ser de cargas eléctricas de signos contrarios, quedarán unidos por una intensa fuerza electrostática.
Por ejemplo, si se enfrentan un átomo de flúor ($Z = 9$), que tiene 7 electrones en su última capa (le falta sólo uno para "completarla") y un átomo de sodio ($Z = 11$), que en su última capa tiene sólo un electrón, el sodio cede al cloro el electrón que tiene en su capa de valencia, con lo que ambos quedan con 8 electrones en la última capa.



El flúor queda cargado negativamente (F^-) y el sodio, positivamente (Na^+). Como las cargas de distinto signo se atraen, los cationes y aniones formados se unirán atraídos por sus cargas: se ha formado un **enlace iónico**.



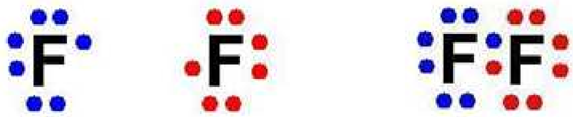
La característica fundamental de este enlace, por tanto, es que se produce un intercambio de electrones entre los átomos (uno da un electrón y el otro lo coge), formándose iones de distinto signo que se atraen. Como este hecho tiene lugar en otros muchos átomos de cada elemento, los iones formados se colocan ordenadamente constituyendo una **red cristalina**.

Al ser muy intensa y de gran alcance la fuerza eléctrica, las **sustancias** que se forman mediante enlace iónico serán **sólidos duros de elevado punto de fusión, pero frágiles** porque, si son golpeados, los iones se moverán un poco de su posición y quedarán enfrentados iones de igual carga que, por repelerse, harán que el cristal iónico se rompa.

Como **en estado sólido** no tienen cargas eléctricas libres, serán **aislantes** de la electricidad, aunque sí **conducirán la electricidad cuando se funden o cuando se disuelven en agua**, ya que en ambas situaciones quedan sueltos los iones.

Enlace covalente: se produce entre elementos no metálicos, ya que cuando están próximos átomos muy electronegativos (con tendencia a formar aniones), ninguno de ellos tiende a ceder electrones. Una manera de adquirir la configuración de gas noble en su última capa es permanecer juntos **compartiendo electrones**, formándose así un enlace covalente, en el que los átomos se unen dos a dos, compartiendo dos, cuatro o seis electrones, recibiendo el nombre de enlace simple, enlace doble o enlace triple, respectivamente. Cuanto mayor sea el número de electrones compartidos, mayor será la fortaleza del enlace.

Para representar el enlace covalente, se suelen utilizar las llamadas **estructuras de Lewis**, que son representaciones en las que se escribe el símbolo del elemento y alrededor de él sus electrones de valencia (última capa).

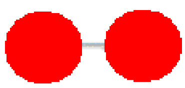


En el ejemplo podemos ver cómo a cada uno de los átomos de flúor le falta un electrón para tener 8 en su capa de valencia (sólo se ha representado la última capa). Para conseguirlo, comparten un par de electrones (procedentes uno de cada átomo), con lo que consiguen la estructura de gas noble. Los electrones compartidos son los que forman el enlace, aunque, para simplificar la escritura, los electrones de enlace se representan por una raya entre ambos átomos:

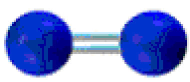
$$F - F \qquad O = O \qquad N \equiv N \qquad H - O - H$$

Cuando los átomos se unen mediante este tipo de enlace y forman **moléculas**, que son las agrupaciones de los átomos unidos, a este tipo de enlace se le denomina **enlace covalente molecular**.

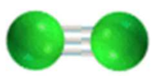
Las moléculas (y las sustancias que estas forman) se representan habitualmente mediante **fórmulas químicas**, en las que se escribe los símbolos de los elementos que forman la molécula, añadiendo números debajo y a la derecha de cada uno (subíndices) que indican los átomos del elemento correspondiente (el 1 no se pone). Así, en los ejemplos que aparecen más arriba, las fórmulas de cada sustancia serían:



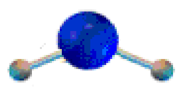
Flúor: F_2
dos átomos de flúor



Oxígeno: O_2
dos átomos de oxígeno



Nitrógeno: N_2
dos átomos de nitrógeno



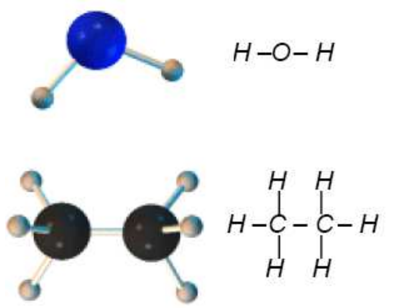
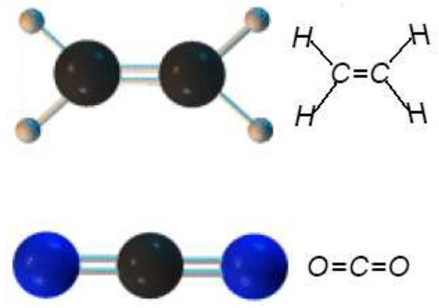
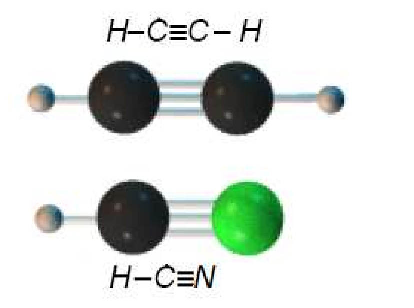
Agua: H_2O
dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno

Las **uniones entre átomos mediante enlace covalente son muy intensas**, pero **las moléculas formadas son prácticamente libres**, ya que apenas mantienen atracciones entre ellas. Por tanto, los **compuestos formados por enlace covalente** se caracterizan por tener **puntos de fusión y ebullición bajos**, siendo la mayoría gases o sólidos blandos a temperatura ambiente.

En general, cuanto mayor es el tamaño de los átomos y de las moléculas, la tendencia a atraerse unas moléculas con otras es mayor (porque el giro de los electrones en zonas más amplias deja regiones parcialmente positivas), lo que hace que los puntos de fusión y ebullición sean más elevados.

Por otro lado, cuando se unen átomos no metálicos de diferentes elementos, a veces se produce entre ellos el llamado **enlace covalente polar** si los electrones no son compartidos equitativamente. Esto hace que aumenten las fuerzas entre las moléculas porque en ellas hay zonas parcialmente ionizadas (dipolos), lo que hace que los puntos de fusión y ebullición en estas sustancias sean mayores de lo que se podría esperar por el tamaño de las moléculas. Es lo que ocurre en el agua (H_2O), en la que los átomos de hidrógeno son parcialmente positivos y los de oxígeno parcialmente negativos.

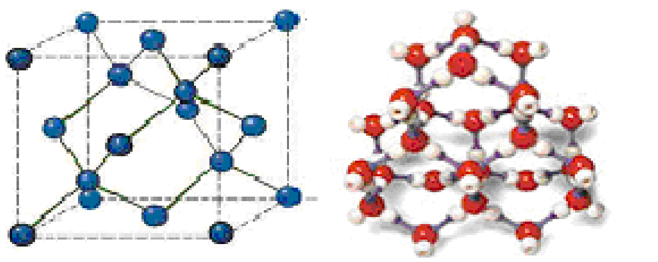
Estas son representaciones de otras sustancias con los átomos unidos por enlace covalente molecular (enlaces sencillos, dobles y triples):

		
En el agua y en el etano, los átomos se unen mediante enlaces simples	En el etileno y el dióxido de carbono, se forman enlaces dobles (se comparten dos parejas de electrones)	En el cianuro de hidrógeno (HCN) y en el acetileno (C_2H_2) se forman enlaces triples

Hay una variedad de compuestos covalentes en los que cada átomo se une a varios (iguales o diferentes) formando **una especie de molécula gigante**, similar a los cristales iónicos, pero con fuerzas entre átomos mucho más intensas y difíciles de romper. Se denominan **cristales covalentes**, caracterizados por ser sólidos de puntos de fusión muy altos, muy duros, muy difíciles de disolver y ser aislantes de la electricidad en cualquier situación (sólidos o fundidos).

A esta categoría pertenecen el diamante, que es la sustancia más dura que existe, y el dióxido de silicio (SiO_2) que constituye la arena.

En el diamante sólo hay átomos de carbono, de forma que cada uno está unido a otros cuatro mediante enlace covalente sencillo, lo que hace de él una molécula gigante.



Diamante (C) Dióxido de silicio (SiO_2)

En el dióxido de silicio, cada átomo de silicio se une a cuatro de oxígeno, pero cada átomo de oxígeno está unido a dos de silicio. Las uniones también son mediante enlaces covalentes sencillos y, como hay el doble de átomos de oxígeno que de silicio, la fórmula química es SiO_2, pero no existen moléculas propiamente dichas, pues el conjunto forma también una molécula gigante.

Enlace metálico: como su nombre indica, se produce entre átomos de metales que, al tener pocos electrones en su última capa, tienen tendencia a liberarlos y al hacerlo forman una estructura cristalina de cationes metálicos que se mantienen unidos porque los electrones liberados forman una especie de nube que se mueve entre los huecos que dejan los cationes (enormes en comparación con los electrones) y, como consecuencia, **son compartidos por todos los cationes** de la estructura cristalina. Cuantos más electrones haya en la nube (cuanto más a la derecha de la tabla se encuentre el metal), más fuerza tendrá el enlace metálico.

Los metales son **duros** y **tenaces** (no se rompen con facilidad porque no hay aniones), pudiendo ser estirados y aplastados (son **dúctiles** y **maleables**), ya que al modificar las posiciones de la red catiónica no se alteran las relaciones de cargas. Pero su principal característica es que son **buenos conductores del calor y la electricidad** debido a que los electrones se pueden mover libremente a grandes distancias por los huecos que dejan los cationes metálicos.

Ejercicio resuelto: Completar la siguiente tabla, y escribir el nombre y fórmula de **dos sustancias** que pueden formarse con los átomos que aparecen en ella. Indicar razonadamente el **tipo de enlace** entre los átomos de cada una de estas dos sustancias.

Símbolo	Nombre	A	Z	p^+	n^o	e^-	Configuración electrónica				Ión más probable
							K	L	M	N	
Na			11		12						
	Cloro	35				17					
O					8		2	6	----	----	
Cu		64		29							

Solución: *para completar la tabla hay que conocer los nombres y símbolos de algunos de los elementos que se han citado en el tema. No es necesario memorizar datos de estos elementos, ya que los números que permiten completar la tabla se obtienen con los datos que aparecen, teniendo en cuenta que el número de protones (p^+) coincide con Z, al igual que el número de electrones (e^-), ya que son átomos neutros. Los neutrones (n^o) se obtienen con la diferencia $A - Z$. Con el número de electrones puede obtenerse la configuración electrónica (distribución por capas con el modelo de Bohr), y ello permite prever qué ión es el más probable para cada elemento (dependerá de los electrones de la última capa: menos de 4, los perderá y se forma catión; más de 4, ganará hasta 8, y se forma anión). En cada fila se tendrá en cuenta los datos de partida así:*

- *En el sodio (Na), con el dato del número atómico (11), se sabe que habrá 11 protones y 11 electrones, y con el dato de que tiene 12 neutrones se calcula el número másico ($A = 11 + 12$). Sabiendo ya que tiene 11 electrones, al distribuirlos por capas resulta que en la tercera (M) hay un electrón, por lo que la tendencia será a perderlo y formar el catión Na^+. Por tanto, el sodio es un **metal**.*
- *En el cloro (Cl), con el dato del número de electrones (17), se sabe que habrá 17 protones y que $Z = 17$, y con el dato del número másico (35), se calcula que tiene 18 neutrones ($n^o = 35 - 17$).Sabiendo ya que tiene 17 electrones, al distribuirlos por capas resulta que en la tercera (M) hay siete electrones, por lo que la tendencia será ganar uno para completar a ocho, formándose el anión Cl^-. Por tanto, el cloro es un **no metal**.*

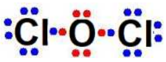
- En el oxígeno (O), con la distribución electrónica sabemos que tiene 8 electrones, por lo que también tendrá 8 protones y su número atómico será $Z = 8$. Además, con el dato de que tiene 8 neutrones, el número másico será la suma de protones y neutrones $(A = 16)$. Sabiendo que en la segunda capa hay 6 electrones, su tendencia será ganar dos electrones para completar a ocho, formándose el anión O^{-2}. Por tanto, el oxígeno es un **no metal**.
- En el cobre (Cu), con el dato de protones (29), se sabe que habrá 29 electrones y que su número atómico será $Z = 29$. Con el dato del número másico (64), se calcula que tiene 35 de neutrones $(n^o = 64 - 29)$. Finalmente, sabiendo que tiene 29 electrones, al distribuirlos por capas resulta que en la cuarta (N) hay un electrón, por lo que la tendencia será a perderlo y formar el catión Cu^{+}. Por tanto, el cobre es un **metal**.

Al completar la tabla anterior, quedaría así:

Símbolo	Nombre	A	Z	p^+	n^o	e^-	Configuración electrónica				Ión más probable
							K	L	M	N	
Na	**Sodio**	**23**	11	**11**	12	**11**	**2**	**8**	**1**	**---**	Na^+
Cl	Cloro	35	**17**	**17**	**18**	17	**2**	**8**	**7**	**---**	Cl^-
O	**Oxígeno**	**16**	**8**	**8**	8	8	2	6	----	----	O^{-2}
Cu	**Cobre**	64	**29**	29	**35**	**29**	**2**	**8**	**18**	º	Cu^+

En cuanto a las sustancias a formar, hay varias posibilidades, pero dos sencillas a elegir podrían ser:

- $NaCl$ (cloruro de sodio): sería una sustancia iónica, porque resulta de unir un metal (Na) con un no metal (Cl). Como los átomos de sodio tienen tendencia a perder un electrón y los de cloro a ganar uno, la fórmula contendrá un átomo de cada elemento.
- Cl_2O (óxido de cloro): sería una sustancia covalente, porque resultaría de la unión de dos elementos no metálicos. Como son átomos diferentes, posiblemente sea algo polar y, aunque posiblemente sea molecular, no podría descartarse que pudiera formar un cristal covalente. Mediante diagramas de Lewis se podría deducir que cada átomo de cloro comparte el electrón de su última capa con uno de los de la última capa de un átomo de oxígeno, por lo que éste necesita unirse a dos átomos de cloro para conseguir ocho y, por tanto, en la fórmula debe haber un átomo de oxígeno y dos de cloro:



En realidad, el oxígeno y el cloro forman otros compuestos en otras proporciones pero, mediante el modelo de Bohr éste sería el que se puede prever.

Se podrían haber propuesto otras sustancias con los elementos de la tabla, como óxido de sodio (Na_2O), el óxido de cobre (Cu_2O) o el cloruro de cobre $(CuCl)$, todos ellos compuestos iónicos, o el cloro molecular (Cl_2) y el oxígeno molecular (O_2), que serían covalentes. Los razonamientos de los tipos de enlace y de fórmulas serían similares a los hechos para $NaCl$ y Cl_2O.

2.6. ELEMENTOS Y COMPUESTOS DE INTERÉS

Algunos elementos químicos, como el carbono (C), el hidrógeno (H), el oxígeno (O), el nitrógeno (N), el fósforo (P) y el azufre (S) tienen gran importancia para los seres vivos y reciben el nombre de **bioelementos**. Muchos de ellos también están presentes en el mundo inorgánico y son utilizados en diferentes aplicaciones; otros elementos menos abundantes, pero también importantes, son el cloro (Cl) , el yodo (I), el calcio (Ca), el sodio (Na), el potasio (K), el magnesio (Mg), el hierro (Fe), el aluminio (Al).

- El **carbono (C)** forma parte de todas las células de los seres vivos.
- El **hidrógeno (H)** es el elemento químico más sencillo y abundante, que forma parte del agua (H_2O) y de todos los compuestos orgánicos.
- El **oxígeno (O)** interviene en la respiración de todos los seres vivos y hace posible la vida en nuestro planeta.
- El **calcio (Ca)** es fundamental para el desarrollo de los huesos y les proporciona solidez y resistencia.
- El **sodio (Na)**, el **potasio (K)** y el **cloro (Cl)** son indispensables para el funcionamiento de las células nerviosas.
- El **yodo (I)** regula importantes funciones en los seres vivos. A pesar de que se necesita en cantidades muy pequeñas, su ausencia puede alterar el funcionamiento de todo el organismo.
- El **hierro (Fe)**, metal de gran importancia industrial para la fabricación de diferentes utensilios.
- El **aluminio (Al)**, usado en la fabricación de utensilios de cocina, así como en arquitectura y aeronáutica.

Según su naturaleza, **los compuestos químicos** se pueden clasificar en **óxidos**, **hidruros**, **hidróxidos**, **ácidos** y **sales**, además de todo el conjunto de los **compuestos orgánicos**, basados en el carbono.

Algunos de los compuestos de más importancia para los seres vivos o por sus aplicaciones son:

Óxidos:

- Agua (H_2O): es esencial para la vida y disolvente casi universal.
- Dióxido de carbono (CO_2): es un gas que se origina en todas las combustiones y en la respiración de los seres vivos. Se encuentra en la atmósfera y es captado por las plantas para la realización de la fotosíntesis. Disuelto en agua, forma un hipotético ácido carbónico (H_2CO_3), presente en todas las bebidas carbónicas.
- Agua oxigenada o peróxido de hidrógeno (H_2O_2): desinfectante y blanqueante.

Hidruros:

- Amoniaco (NH_3): se emplea para fabricar abonos.
- Metano (CH_4): es el principal componente del gas natural.

Hidróxidos:

- Hidróxido de sodio ($NaOH$): también llamado "sosa cáustica", es un sólido muy corrosivo y peligroso que se disuelve muy bien en el agua, pudiendo producir quemaduras en la piel.
- Hidróxido de potasio (KOH): es un sólido muy soluble en agua y tan peligroso como el anterior. También se llama "potasa".

Ácidos:

- Ácido clorhídrico (HCl): es un ácido fuerte, muy utilizado en los laboratorios.
- Ácido sulfúrico (H_2SO_4): es un ácido fuerte, muy importante en los laboratorios y en la industria, que forma unas sales llamadas sulfatos.

Sales:

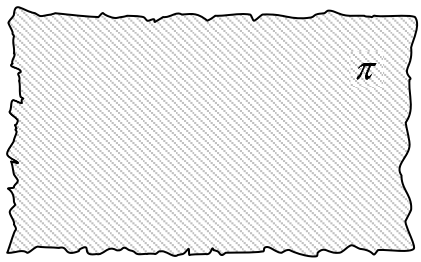
- Cloruro de sodio ($NaCl$): de ella se obtiene el cloro y el sodio; es la sal común.
- Hipoclorito de sodio ($NaClO$): es el principal componente de la lejía; se emplea como desinfectante y blanqueante.

Los compuestos químicos presentes en los seres vivos se llaman **principios inmediatos** y constituyen las **biomoléculas**; los que contienen carbono e hidrógeno se llaman **principios inmediatos orgánicos**, entre los que destacan los **glúcidos** (como la glucosa, $C_6H_{12}O_6$, que sintetizan los organismos autótrofos en la fotosíntesis a partir de CO_2 y H_2O), los **lípidos**, las **proteínas** y los **ácidos nucleicos** (ADN y ARN).

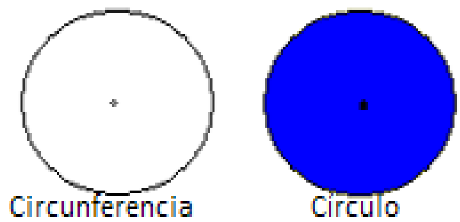
TEMA 4: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA PLANA
1.1. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

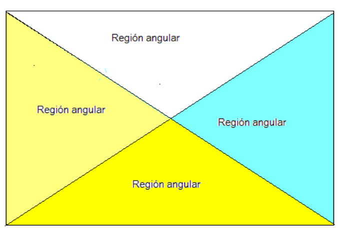
La palabra geometría significa “medida de la Tierra” y, aunque inicialmente fue la ciencia dedicada a este cometido, posteriormente pasó a ser la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras o formas en el plano y en el espacio.
En este tema se verán en primer lugar aspectos relacionados con las figuras planas (como triángulos, rectángulos, o círculos), para finalizar con las figuras que ocupan un volumen (como cubos, pirámides o cilindros), que son las que normalmente podemos observar.
Por su sencillez, resulta difícil definir con precisión los conceptos más simples de geometría (punto, recta y plano), pero es muy fácil comprender su significado. Así, la idea intuitiva de **punto** es suficiente para comprender que una **recta** está formada por infinitos puntos alineados como consecuencia de unir dos puntos con una regla, por ejemplo.
Un **plano** está también formado por infinitos puntos que ocupan una región del espacio con la forma de la hoja que estás leyendo ahora o la de la pizarra, aunque de un tamaño todo lo grande que te puedas imaginar. Se suelen nombrar con letras griegas y, para dibujarlos, se representan con los bordes irregulares, indicando así que el dibujo pertenece a una región infinita.



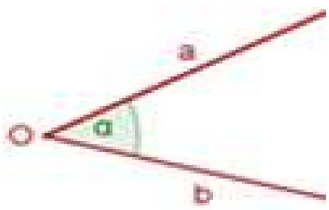
A partir de los conceptos anteriores, surgen otros como:
- **Semirrecta**: porción de una recta a partir de un punto de ésta, llamado **origen**.
- **Segmento**: porción de una recta comprendida entre dos puntos, llamados **extremos**.
- **Circunferencia**: sucesión de infinitos puntos de un plano que están a la misma distancia (**radio**) de otro punto llamado **centro**.
- **Círculo**: porción de plano encerrada en el interior de una circunferencia, incluyendo a la propia circunferencia.



- **Región angular**: cada una de las partes en que queda dividido un plano por dos rectas que se cortan en un punto (rectas secantes).



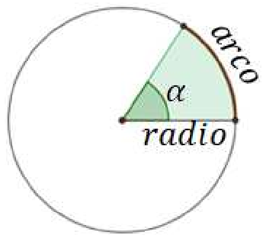
- **Ángulo**: región del plano comprendida entre dos semirrectas (los **lados**) que tienen un origen común (el **vértice**)
  Los ángulos suelen representarse mediante letras griegas o letras mayúsculas con el marcador angular, $\alpha = \hat{A}$
  Para medir ángulos, se comparan con ángulos característicos bien definidos, como los determinados por dos radios de una circunferencia:



- ✓ **Ángulo completo:** corresponde a una vuelta completa de circunferencia.
- ✓ **Ángulo llano:** es la mitad de uno completo (media circunferencia).
- ✓ **Ángulo recto:** es la cuarta parte del completo (la cuarta parte de la circunferencia).
- ✓ **Ángulo nulo:** está determinado por dos radios coincidentes.

Las **unidades angulares** más habituales son el **grado sexagesimal** y el **radián**:

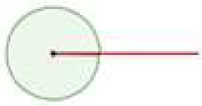
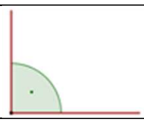
- ✓ **El grado sexagesimal** resulta de dividir en 360 partes el ángulo completo, por lo que éste tendrá 360 grados; cada grado (º) se divide en 60 minutos (') y cada minuto, en 60 segundos ("), por lo que $1º = 60' = 3600''$.
- ✓ **El radián** es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio de la circunferencia. Se considera unidad natural de medidas angulares, ya que para cualquier ángulo, su valor se obtiene dividiendo el arco correspondiente al ángulo y el radio de la circunferencia:



$$\alpha(rad) = \frac{arco}{radio}$$

Como la relación entre la longitud de una circunferencia y su radio es $\boldsymbol{2\pi}$(aproximadamente $2 \times 3{,}14 = 6{,}28$), el ángulo completo será $\boldsymbol{2\pi}$ **radianes**.

Los valores de los ángulos más característicos en estos dos tipos de unidades son:

ÁNGULO		SEXAGESIMALES	RADIANES
COMPLETO		360º	2π
LLANO		180º	π
RECTO		90º	$\frac{\pi}{2}$

Los cambios de unidades angulares se hacen con esta relación de proporcionalidad:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha(º)}{180} = \frac{\alpha(rad)}{\pi}}$$

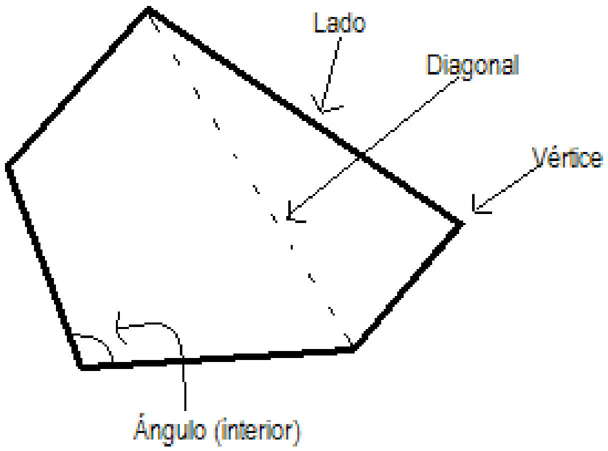
Ejemplo: equivalencia en radianes de un ángulo de 30º:

$$\frac{30º}{180º} = \frac{\alpha(rad)}{\pi} \rightarrow \alpha(rad) = \frac{\pi \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{6}\, rad \cong 0{,}52\, rad$$

1.2. PERÍMETRO Y ÁREA DE FIGURAS PLANAS

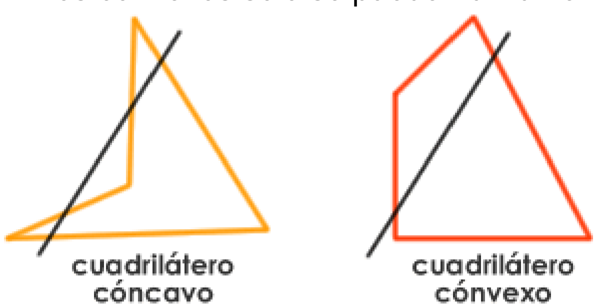
Las **figuras planas** son espacios cerrados que se obtienen como consecuencia de que tres o más rectas se corten en un plano, dos a dos, de distintas maneras. Son los triángulos, los cuadriláteros y polígonos en general.

Un **polígono** es una porción del plano delimitada por tres o más segmentos rectos, llamados **lados**, cuyos extremos coinciden, dos a dos, en ciertos puntos llamados **vértices**, que se asocian a los correspondientes **ángulos** del polígono (internos o externos), siendo las **diagonales** los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

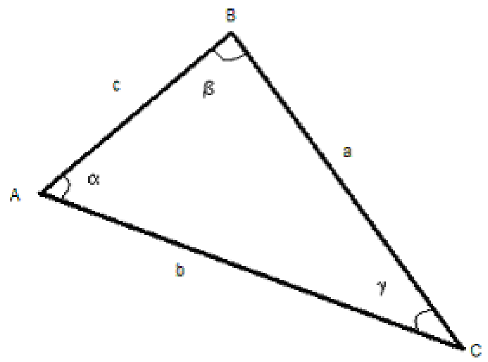


Los polígonos se pueden clasificar según distintos criterios:

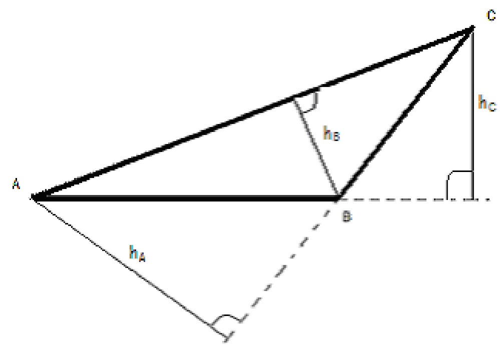
- **Por el número de lados**: triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7 lados), octógonos (8 lados), eneágonos (9 lados), decágonos (10 lados), endecágonos (11 lados), dodecágonos (12 lados). También podemos referirnos, para otros números de lados, de la forma genérica "polígono de ..... lados".
- **Por la relación entre sus lados**: los **polígonos regulares** tienen todos sus lados y ángulos iguales; en caso contrario se llaman **polígonos irregulares**.
- **Por sus ángulos**: los **polígonos cóncavos** tienen algún ángulo interior cóncavo (mayor que el ángulo llano), mientras que los **polígonos convexos** tienen todos sus ángulos interiores convexos (menores que el ángulo llano). Una propiedad interesante es que los polígonos cóncavos pueden dividirse en más de dos partes al ser atravesados por una recta, mientras que los convexos sólo se pueden dividir en dos.



Los **triángulos** son polígonos con tres lados, tres ángulos y tres vértices. Los vértices suelen representarse con letras mayúsculas (**A**, **B**, **C**) de modo que el ángulo correspondiente se designa con la misma letra, pero con el símbolo angular o mediante la correspondiente letra griega ($\boldsymbol{\alpha} = \widehat{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{\beta} = \widehat{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{\gamma} = \widehat{\boldsymbol{C}}$), y los lados se representan con las letras minúsculas correspondientes a las de sus vértices opuestos (**a**, **b**, **c**).



Las alturas de un triángulo son segmentos que unen cada vértice con el lado opuesto, siendo perpendiculares a éste o a su prolongación. Para trazarlas, basta con situar la regla sobre el lado del que se desea trazar la altura; sobre la regla se apoya la escuadra y se desplaza ésta hasta que coincida su lado perpendicular a la regla con el vértice.

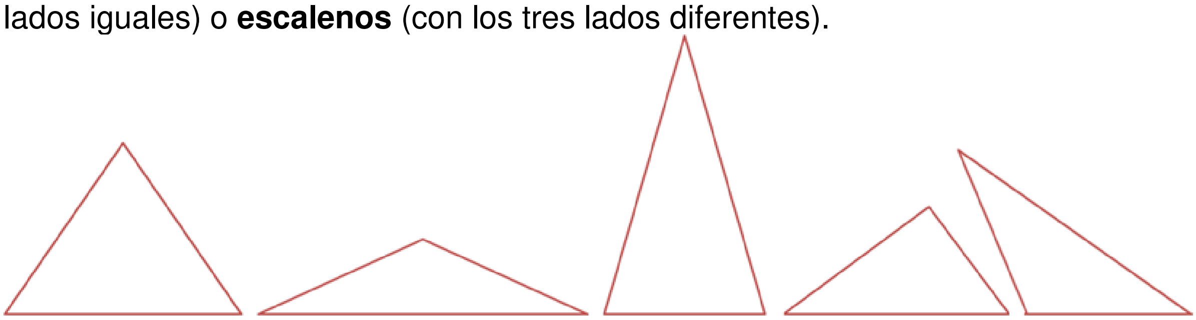


Propiedades de los triángulos:

- La suma de sus ángulos interiores equivale a dos ángulos rectos (180º).
- Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

Los triángulos pueden clasificarse según diferentes criterios:

- Según sus lados: **equiláteros** (con todos los lados iguales), **isósceles** (con dos lados iguales) o **escalenos** (con los tres lados diferentes).

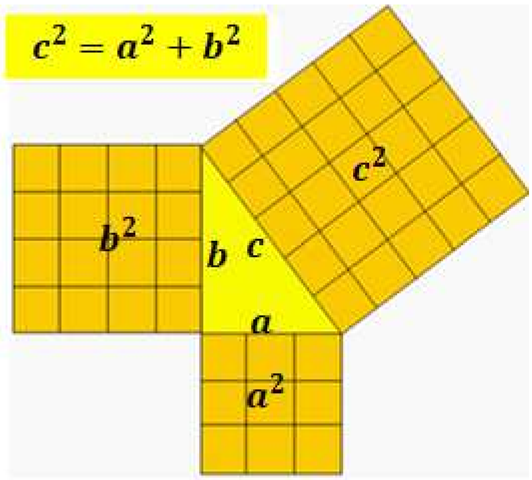


Equilátero Isósceles Escaleno

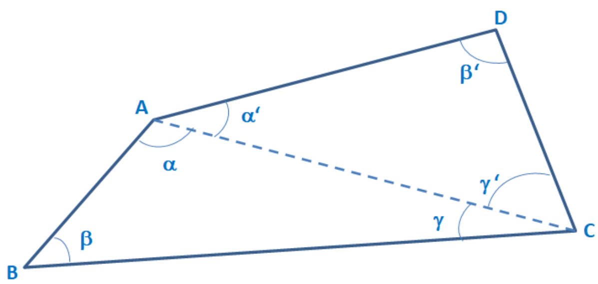
- Según sus ángulos: **acutángulos** (con todos los ángulos agudos, $< 90º$), **obtusángulos** (con un ángulo obtuso, $> 90º$) o **rectángulos** (con un ángulo recto).

Rectángulo Acutángulo Obtusángulo

En los **triángulos rectángulos**, se llama **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto y **catetos** a los otros dos lados, cumpliéndose el **teorema de Pitágoras**: *"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos":*

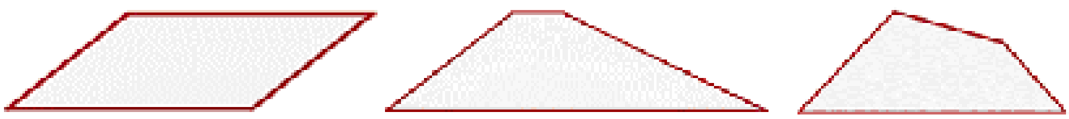


Los **cuadriláteros** son polígonos con cuatro lados y cuatro ángulos, en los que cada una de las dos diagonales que se pueden trazar los dividen en dos triángulos. Como consecuencia, en todo cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores tiene que ser cuatro ángulos rectos ($360º$):



Igual que todos los polígonos, los cuadriláteros pueden ser cóncavos o convexos, según que tengan un ángulo mayor de $180º$ o no.

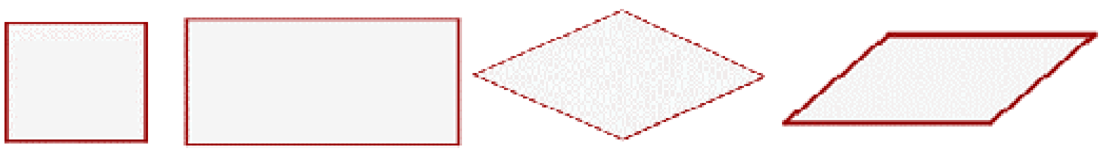
A su vez, según la relación entre sus lados, los cuadriláteros convexos pueden ser paralelogramos, trapecios y trapezoides.



Paralelogramo   Trapecio   Trapezoide

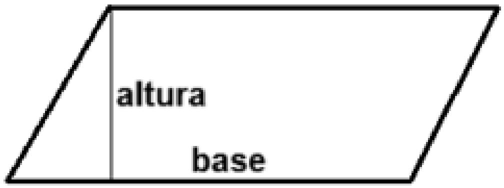
- Los **paralelogramos** tienen los lados paralelos dos a dos.
- Los **trapecios** tienen dos lados paralelos entre sí y otros dos no.
- Los **trapezoides** no tienen lados paralelos.

Los paralelogramos pueden ser cuadrados, rectángulos, rombos y romboides, y todos ellos se caracterizan porque una diagonal les divide en dos triángulos iguales.

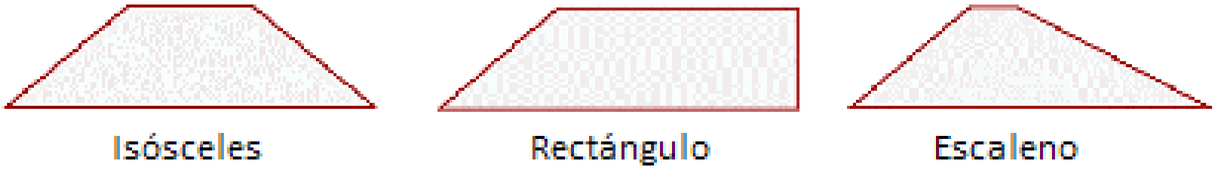


Cuadrados   Rectángulos   Rombos   Romboides

- Los **cuadrados** tienen todos los lados iguales y los cuatro ángulos rectos, con dos diagonales iguales y perpendiculares.
- Los **rectángulos** tienen los lados iguales dos a dos y también los cuatro ángulos rectos. Las diagonales son iguales, pero no perpendiculares. El lado sobre el que se apoya se llama base y el perpendicular a éste, altura.
- Los **rombos** tienen los cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos, pero ninguno es recto. Las dos diagonales son perpendiculares.
- Los **romboides** tienen los lados iguales dos a dos y los ángulos iguales dos a dos, pero ninguno es recto. Al lado sobre el que se apoya se le llama **base**, y al segmento que une la base con su lado opuesto y es perpendicular a ambos, **altura**.

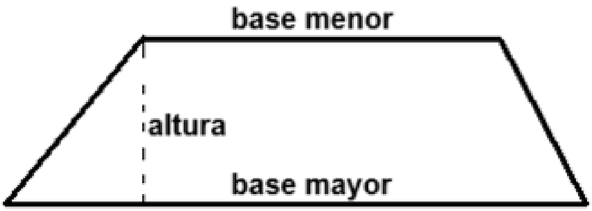


Los trapecios pueden ser isósceles, rectángulos o escalenos:

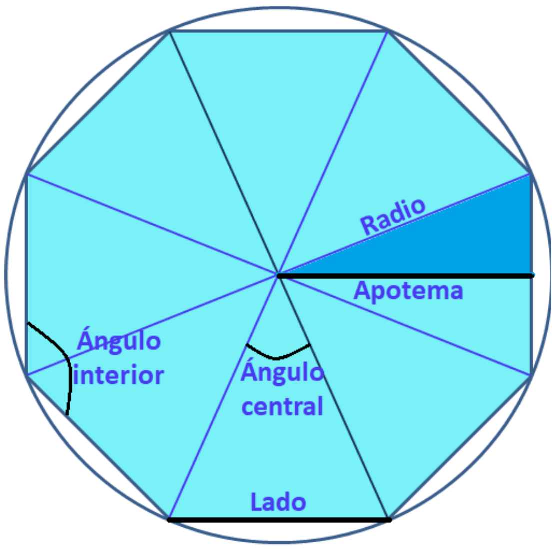


- **Isósceles**: con los lados no paralelos iguales.
- **Rectángulos**: con dos ángulos rectos.
- **Escalenos**: ni lados iguales, ni ángulos rectos.

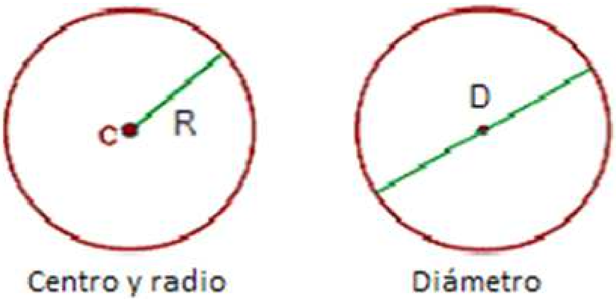
En todos los trapecios se llaman **bases** a los dos lados paralelos (base mayor y base menor); su **altura** es el segmento que une las dos bases y es perpendicular a ambas.



Los **polígonos regulares** tienen todos sus lados y sus ángulos iguales. Como consecuencia, hay un punto interior (llamado **centro del polígono**) que está a la misma distancia de todos los vértices, por lo que desde él se puede trazar una circunferencia que toca todos los vértices (la circunferencia circunscrita). Tal como se aprecia en la imagen, cuantos más lados tenga un polígono regular, más puntos en común tendrá con la circunferencia circunscrita, por lo que se puede considerar que una **circunferencia** es un polígono regular de infinitos lados, y que un **círculo** es el espacio plano encerrado en él. Esta idea permite comprender algunas propiedades de las formas circulares.



En una circunferencia el **radio** es cualquier segmento que une el centro y uno de sus puntos, siendo el **diámetro** cualquiera de los segmentos que, pasando por el centro, unen dos puntos de la circunferencia. También reciben estos nombres (radio y diámetro), las longitudes de los correspondientes segmentos, siendo el diámetro el doble del radio ($D = 2R$).



En un polígono regular, el **ángulo central** ($\boldsymbol{\alpha}$) se obtiene dividiendo el ángulo completo ($\mathbf{360º}$) entre el número de lados del polígono y permite descomponer a éste en tantos triángulos iguales, como lados tiene el polígono, siendo la **apotema** del polígono la altura de cada uno de estos triángulos.

El **ángulo interior** del polígono regular ($\boldsymbol{\beta}$) es el correspondiente a un vértice del mismo, y puede calcularse como el **suplementario del ángulo central**, es decir, la diferencia entre un ángulo llano ($\mathbf{180º}$) y el ángulo central, ya que es la suma de los dos ángulos no centrales de cada uno de los triángulos en que se descompone el polígono. Por tanto, siendo N el número de lados del polígono regular, el ángulo interior será:

$$\boldsymbol{\beta = 180º - \frac{360º}{N}}$$

Aprovechando sus propiedades, los polígonos regulares se pueden dibujar a partir del ángulo central o del ángulo interior.

El **perímetro** de un polígono sirve para medir su **contorno** y es la suma de todos sus lados, por lo que en los polígonos regulares basta con multiplicar la longitud de uno de sus lados por el número de lados. Se mide en unidades de **longitud** (cm, m, km,…).

Ejemplo 1: perímetro de un triángulo cuyos lados miden $5\ cm, 6\ cm$ y $10\ cm$

$$Perímetro = 5\ cm + 6\ cm + 10\ cm = 21\ cm.$$

Ejemplo 2: perímetro de un hexágono de $5\ cm$ de lado

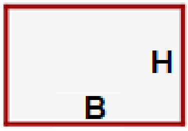
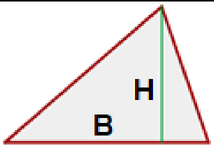
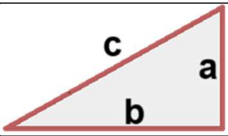
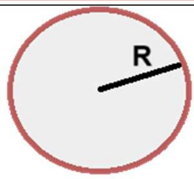
$$Perímetro = 5\ cm \times 6 = 30\ cm$$

La longitud de una circunferencia (que equivale al perímetro del círculo) se calcula multiplicando el doble de su radio (el diámetro) por el número $\boldsymbol{\pi}$ ("pi", por "perímetro"), que tiene infinitas cifras, siendo las primeras $3{,}141592653589\ldots$, aunque normalmente se toma como valor aproximado $\boldsymbol{\pi} \cong \mathbf{3{,}14}$. Por tanto, la longitud de la circunferencia será:

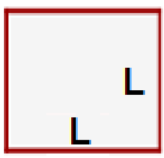
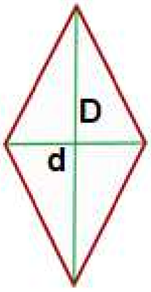
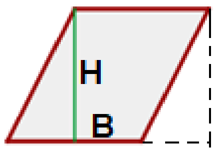
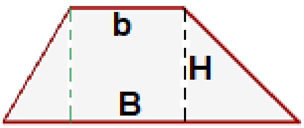
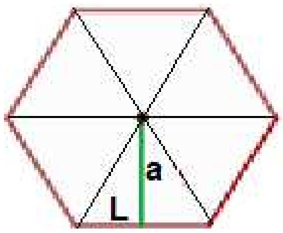
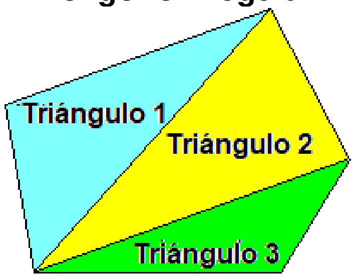
$$\boldsymbol{L = 2\pi R}$$

El **área** de un polígono sirve para medir la **porción de plano encerrada** en él y, aprovechando sus propiedades, se obtiene por comparación con el área de un cuadrado, por lo que se mide en unidades de **superficie** (cm^2, m^2, km^2, …)

En el siguiente cuadro se resumen las cinco propiedades más importantes que permiten calcular perímetros y áreas de cualquier figura plana:

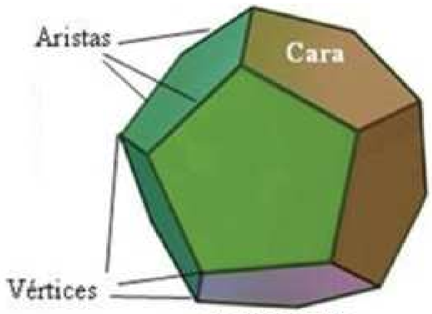
	**1. Área del rectángulo**	$A = B \times H$
	**2. Área del triángulo**	$A = \dfrac{B \times H}{2}$
	**3. Teorema de Pitágoras**	$c^2 = a^2 + b^2$
	**4. Perímetro del círculo**	$p = 2\pi R$
	5. Área del círculo	$A = \pi R^2$

A partir de las propiedades anteriores, se pueden deducir fórmulas específicas para otras figuras planas, como las siguientes:

Cuadrado	**Rombo**	**Romboide**
		
$A = L^2$	$A = \dfrac{D \times d}{2}$	$A = B \times H$
Trapecio	**Polígono regular**	**Polígono irregular**
		
$A = \dfrac{(B+b)}{2} \times H$	$A = \dfrac{perímetro \times apotema}{2}$	$A = A_1 + A_2 + A_3$

2. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Los **poliedros** y los **cuerpos de revolución** son figuras geométricas que no se pueden representar tal como son en un plano, ya que necesitan una tercera dimensión que les da profundidad (en papel se dibujan con la perspectiva para que la vista capte esta idea).



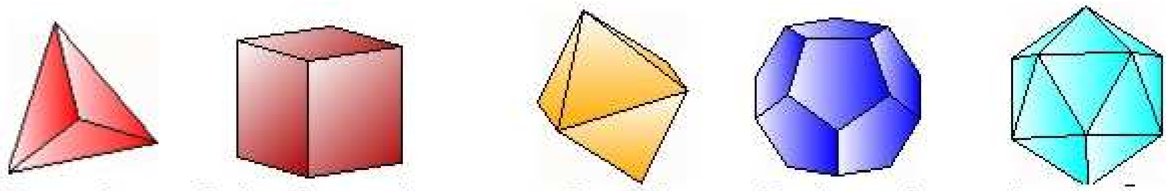
dodecaedro

Los **poliedros** son espacios cerrados delimitados por polígonos con diferentes orientaciones (las **caras**), de forma que los segmentos donde se cortan dos caras vecinas (las **aristas**) se cortan a su vez en puntos donde coinciden tres o más caras (los **vértices**).
En los poliedros convexos (los formados por caras que son polígonos con ángulos menores que el ángulo llano) sus tres elementos (caras, vértices y aristas) cumplen el **teorema de Euler** que consiste en que la suma del número de caras y de vértices coincide con el número de vértices más dos:

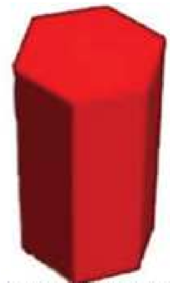
$$C + V = A + 2$$

Puede haber tres tipos de poliedros: sólidos regulares, prismas y pirámides.

- **Los sólidos perfectos, regulares o platónicos** son cinco cuerpos geométricos que cierran el espacio con todas sus caras iguales. Son el **tetraedro** (4 caras), el **cubo** o hexaedro (6 caras), el **octaedro** (8 caras), el **icosaedro** (20 caras) y el **dodecaedro** (12 caras). En todos las caras son triángulos equiláteros, excepto en el dodecaedro, que tiene pentágonos regulares.


Tetraedro Cubo -hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

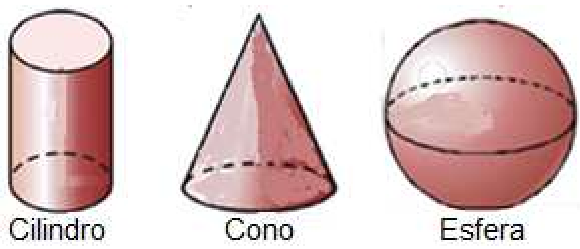
- **Los prismas** tienen dos caras paralelas iguales (las **bases**) unidas mediante rectángulos (las **caras laterales**), denominándose altura a la distancia entre las dos bases.
  Se nombran a partir del nombre de la base y pueden ser regulares o irregulares, según lo sean o no sus bases. Si todas las caras son rectángulos, se llama ortoedro.

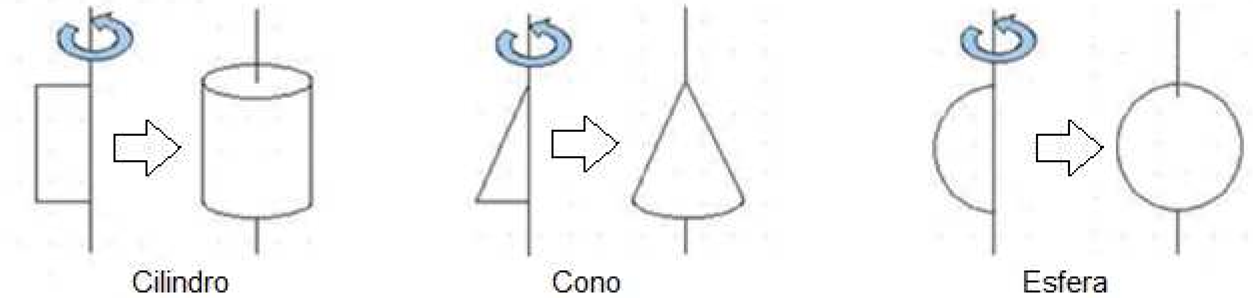

Prisma hexagonal

- **Las pirámides** tienen una cara (la **base**) de cuyos lados salen triángulos (las **caras laterales**) que se unen en un punto llamado **vértice de la pirámide**. La distancia entre el vértice de la pirámide y la base es la **altura** de la pirámide, y la **apotema** de la pirámide es la altura de cada uno de los triángulos que forman las caras laterales.
  Se nombran a partir del nombre de la base y también pueden ser regulares o irregulares, según lo sea o no su base. .


Pirámide pentagonal

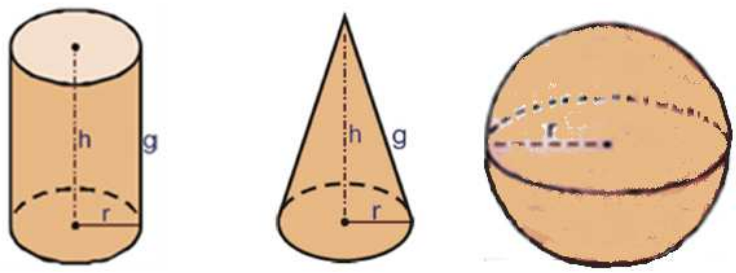
Los **cuerpos de revolución** (cilindro, cono y esfera) también son espacios cerrados que incluyen formas circulares en una tercera dimensión. Su denominación se debe a que resultan de hacer girar alrededor de un eje figuras geométricas planas (un rectángulo, un triángulo rectángulo o una semicircunferencia):





Por similitud con las formas circulares, el cilindro y el cono son equivalentes, respectivamente, a un prisma o una pirámide cuyas bases son polígonos regulares de infinitas caras (circunferencias), mientras que la esfera sería el equivalente a un poliedro regular de infinitas caras.
Los elementos de estas figuras son:

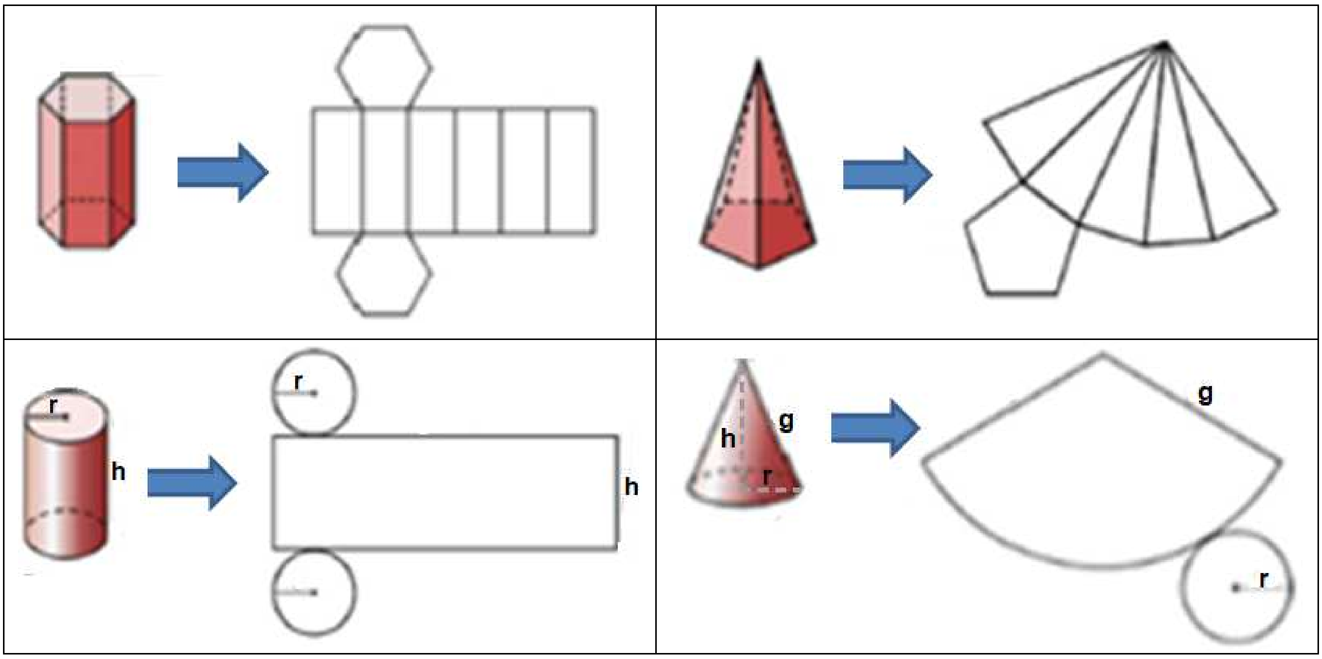
- El **radio (r)** es el correspondiente a la circunferencia de la base en el cilindro y el cono, y en la esfera, a la distancia entre el centro y cualquier punto de su superficie.
- La **altura (h)** en el cilindro es el segmento que une los centros de las dos bases, y en el cono, el segmento que une el centro de la base con el vértice.
- La **generatriz (g)** es el segmento que, tomando por eje la altura, al girarlo produce la superficie exterior en el cilindro y el cono. Mide lo mismo que la altura en el cilindro, pero en el cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma con la altura y el radio.



2.1. ÁREA DE FIGURAS DEL ESPACIO

Poliedros y cuerpos de revolución están delimitados por superficies que, en objetos cotidianos, puede ser necesario conocer su extensión porque está relacionada, por ejemplo, con la cantidad de madera para construir un mueble, o la pintura para pintar las paredes de un depósito.
El área de los poliedros se puede calcular descomponiendo su contorno en figuras planas sencillas (polígonos), cuyo dibujo agrupado se conoce como **desarrollo plano** que, además de permitir construir el poliedro por plegado de las caras, resulta muy útil para calcular su área.
Teniendo en cuenta sus elementos, también se puede dibujar el desarrollo plano del cilindro y del cono incluyendo el círculo para las bases. Aunque para la esfera se puede calcular la superficie, por sus características, no es posible dibujar un desarrollo plano.

En las imágenes se pueden ver los desarrollos planos de un prisma hexagonal, una pirámide pentagonal, un cilindro y un cono:



En el cálculo del área de prismas y pirámides se distingue el área correspondiente a las caras laterales (**área lateral**) y el que incluye la base o bases (**área total**). Por extensión, en cilindros y conos se utilizan estos conceptos, partiendo de la idea de que ambos pueden considerarse un prisma o una pirámide, respectivamente, cuyas bases son polígonos regulares de infinitos lados (círculos). De este modo puede deducirse fácilmente el área lateral de ambas figuras:

- **Cilindro:** por similitud con un prisma, será el perímetro de su base ($2\pi r$), multiplicado por su altura (h): $\boldsymbol{A_{lateral} = 2\pi rh}$
- **Cono:** por similitud con una pirámide, será el perímetro de su base ($2\pi r$) multiplicado por su apotema (que será la generatriz, g) y dividido entre dos, por lo que, simplificando, queda: $\boldsymbol{A_{lateral} = \pi rg}$

En la esfera no tiene sentido el concepto de área lateral, pero sí el área total, que viene dada por la fórmula: $\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$

2.2. VOLUMEN DE FIGURAS DEL ESPACIO

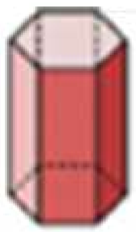
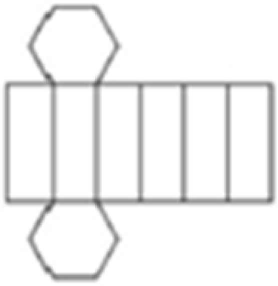
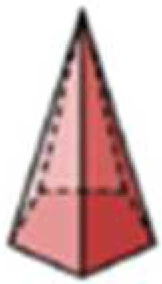
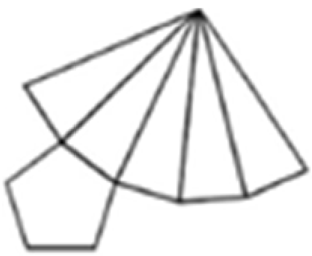
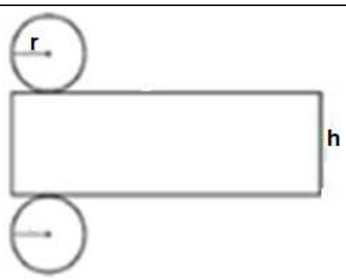
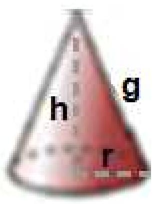
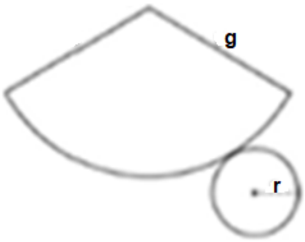
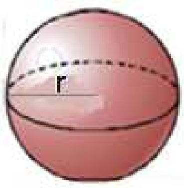
El **volumen** (o capacidad) de estos cuerpos hace referencia al espacio encerrado en su interior y se obtiene así:

Prisma y cilindro: $\boldsymbol{Volumen = \text{área de la base} \times altura}$

Pirámide y cono: $\boldsymbol{Volumen = \dfrac{\text{área de la base} \times altura}{3}}$

Esfera: $\boldsymbol{Volumen = \dfrac{4\pi r^3}{3}}$

2.3. RESUMEN DE FÓRMULAS

FIGURA	DESARROLLO PLANO	ÁREA	VOLUMEN
		$A_{base} = \dfrac{per_{base} \times apot_{base}}{2}$ $A_{lat} = per_{base} \times altura$ $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lat}$	$V = A_{base} \times altura$
		$A_{base} = \dfrac{per_{base} \times apot_{base}}{2}$ $A_{lat} = \dfrac{per_{base} \times apot_{lat}}{2}$ $A_{total} = A_{base} + A_{lat}$	$V = \dfrac{A_{base} \times altura}{3}$
		$A_{base} = \pi \cdot r^2$ $A_{lat} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lat}$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
		$A_{base} = \pi \cdot r^2$ $A_{lat} = \pi \cdot r \cdot g$ $A_{total} = A_{base} + A_{lat}$	$V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
		$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

RECUERDA:

- **Las áreas** siempre deben expresarse en **unidades cuadradas** $(mm^2, cm^2, m^2,\ldots)$ porque su cálculo siempre resulta de multiplicar dos longitudes.
- **Los volúmenes** siempre deben expresarse en **unidades cúbicas** $(mm^3, cm^3, m^3,\ldots)$ porque siempre resultan de multiplicar tres longitudes.
- La relación entre las **unidades de volumen y de capacidad** es, por definición, $\mathbf{1\ dm^3 = 1\ \ell}$ y, como consecuencia, $\mathbf{1\ cm^3 = 1\ m\ell}$.

1. INTRODUCCIÓN

La estadística es una disciplina matemática con múltiples aplicaciones en sociología, economía, medicina y, en general, todo tipo de ciencias experimentales. Tiene por objeto la recogida de los datos que describen fenómenos, su organización y su análisis para llegar a conclusiones que permitan conocer mejor hechos ya ocurridos o predecir lo que pueda ocurrir en el futuro.

2. CONCEPTOS

El análisis estadístico de un fenómeno empieza con la recogida de datos cuyo estudio se facilita organizándolos adecuadamente en tablas y gráficos. Estos datos son valores de propiedades del fenómeno estudiado llamadas **variables estadísticas**, que pueden ser **cualitativas** (si están dadas por palabras o letras), **cuantitativas discretas** (cuando están dadas por un número entero) o **cuantitativas continuas** (si están dadas por un número real).
Así, por ejemplo, si una fábrica de yogures quiere tener éxito en sus ventas, debe realizar un riguroso control de calidad analizando una serie de características de sus productos, como el aroma, el color, el peso o la densidad (de éstas, las dos primeras son variables cualitativas, mientras que las dos últimas son variables cuantitativas continuas). Como, evidentemente, en la fábrica de yogures la producción diaria es muy grande (**población estadística**), sería imposible analizar en detalle cada yogur obtenido, por lo que el control de calidad se hará sobre un reducido número de yogures (**muestra estadística**), suficientemente representativo de todos los fabricados a lo largo del día. Los datos de las medidas de las variables se tratarán con técnicas estadísticas, mientras que la elección de la muestra debe hacerse aleatoriamente mediante los conceptos de probabilidad.

3. ESTUDIO ESTADÍSTICO
3.1. RECOGIDA DE DATOS

Una vez planteado el objetivo del estudio a realizar, lo primero es recoger la información de la propiedad o propiedades que se quieren analizar. Puede realizarse mediante un cuestionario, o tomando medidas de los elementos a analizar.
Para comprenderlo mejor, vamos a partir de un ejemplo con un control de calidad en una fábrica de yogures, en el que se quiere analizar su peso. Para ello, se podría seleccionar un determinado número a lo largo del día (porque el total puede ser muy grande) y sacar conclusiones con ellos. Imaginemos que se han pesado 25 yogures a lo largo de un día, siendo sus pesos (en gramos) los siguientes:

124, 111, 129, 122, 116, 124, 119, 113, 123, 126, 117, 129, 112, 126, 120, 134, 124, 116, 118, 124, 123, 121, 125, 122, 119

En este caso la población estadística sería toda la producción diaria de yogures de la fábrica; la muestra, los 25 yogures que se analizan. La propiedad estudiada es el peso, que es una variable estadística cuantitativa continua (porque sería posible obtener resultados intermedios entre los valores medidos).

3.2. ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS

En estos casos conviene agrupar los datos por intervalos y organizarlos en una tabla como la siguiente:

Pesos (gramos)	Marcas de clase x_i	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas	
		f_i	Acumuladas F_i	$n_i(\%)$	Acumuladas $N_i(\%)$
[110,115)	112,5	3	3	12	12
[115,120)	117,5	6	9	24	36
[120,125)	122,5	10	19	40	76
[125,130)	127,5	5	24	20	96
[130,135)	132,5	1	25	4	100
Totales		**25**	**------------**	**100**	**------------**

En esta tabla:

- **Variable estadística**: contiene los valores de la propiedad que se analiza. Como en este ejemplo la variable es cuantitativa continua (el peso de los yogures), se ha puesto una primera columna con 5 intervalos en los que se agrupan los datos obtenidos; la segunda columna contiene las **marcas de clase, x_i,** que sirven para representar en cada intervalo a todos los valores incluidos en él. (cuando la variable es cualitativa o cuantitativa discreta, las x_i coinciden con los valores de la variable estadística).

- **Frecuencias absolutas (f_i)**: es el número de veces que se repite cada valor de la variable estadística. La suma de todas las frecuencias absolutas da el número de datos analizados:

$$\boldsymbol{N} = \sum f_i$$

- **Frecuencias absolutas acumuladas (F_i)**: es la suma de las frecuencias absolutas correspondientes a los valores de la variable estadística menores o iguales al valor considerado. Sólo tiene sentido para variables estadísticas cuantitativas.

- **Frecuencias relativas (n_i)**: es la relación entre la frecuencia absoluta y el número total de datos analizados. Suele darse de forma porcentual:

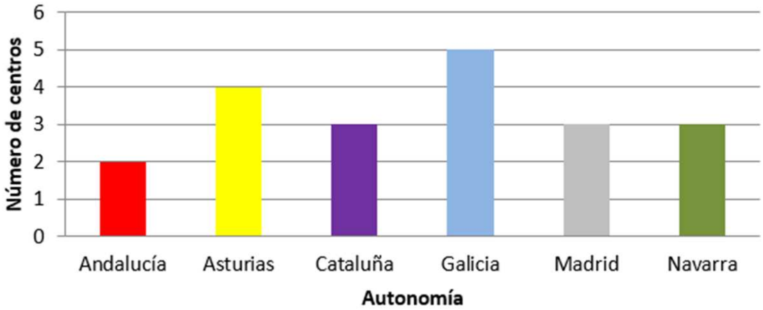
$$\boldsymbol{n_i}(\%) = \frac{\boldsymbol{f_i}}{\boldsymbol{N}} \times \mathbf{100}$$

- **Frecuencias relativas acumuladas (N_i)**: como las frecuencias absolutas acumuladas, pero sumando las frecuencias relativas correspondientes a los valores de la variable estadística menores al valor considerado.

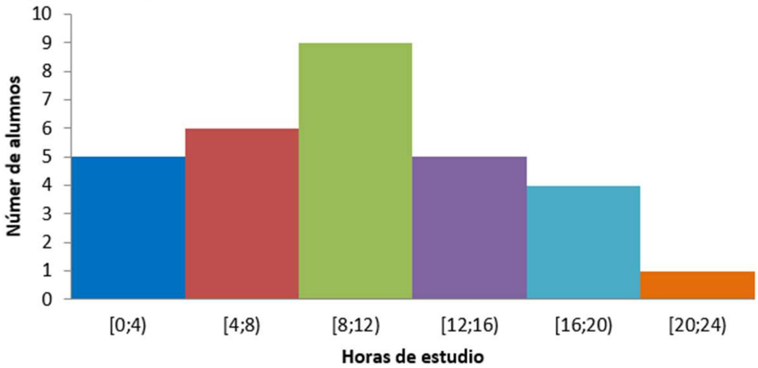
3.3. GRÁFICAS ESTADÍSTICAS

Para facilitar la comprensión del conjunto de los datos de la tabla de frecuencias se pueden hacer diferentes tipos de **gráficos estadísticos**:

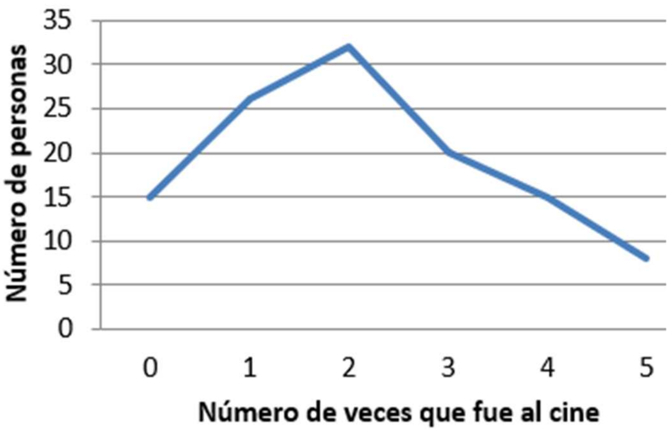
- **Diagramas de barras:** como su nombre indica, para cada valor de la variable estadística utiliza una barra, separada de las demás barras, cuya altura se corresponde con la frecuencia (absoluta o relativa) de dicho valor de la variable. Es un tipo de gráfico válido para variable cualitativa o cuantitativa discreta.



- **Histogramas:** son similares al diagrama de barras, pero con las barras pegadas unas a otras porque sólo puede usarse cuando la variable es cuantitativa continua.



- **Polígonos de frecuencias:** similar al diagrama de barras, pero sin dibujar la barra y uniendo el punto central más alto que correspondería a cada barra con el de la siguiente.



- **Pictogramas:** similares a los diagramas de barras, pero utilizando imágenes que hagan alusión al fenómeno analizado, en lugar de barras de diferentes alturas.

- **Diagramas de sectores:** se reparte un círculo en diferentes zonas proporcionales a la frecuencia (absoluta o relativa) de cada valor de la variable.

En el ejemplo de los pesos de los yogures, el tipo de gráfico más adecuado sería el histograma (es específico para variable continua) o el diagrama de sectores:

Histograma

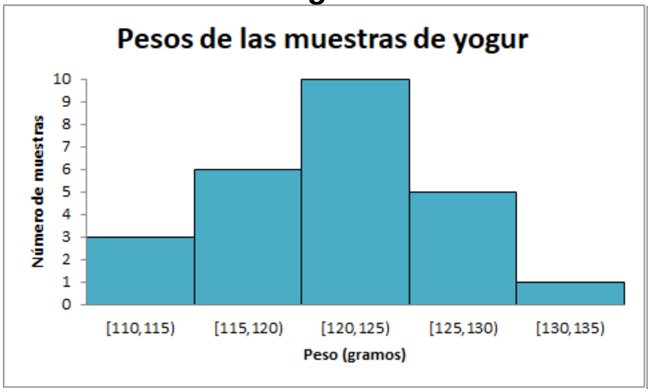
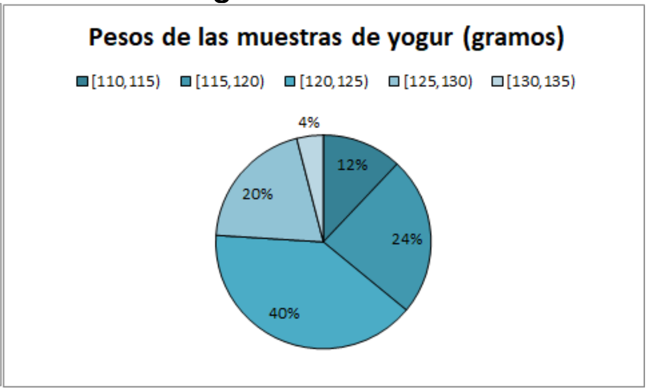


Diagrama de sectores



3.4. ANÁLISIS DE DATOS: MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y DE DISPERSIÓN

Los **parámetros estadísticos de centralización y dispersión** permiten sacar conclusiones a partir de los datos organizados en tablas o gráficos. Un parámetro de centralización es un valor de la variable que representa al conjunto de los valores obtenidos en el estudio; los parámetros de dispersión muestran la representatividad de los parámetros de centralización.

Parámetros de centralización: los más comunes son la moda, la mediana y la media.

- **Moda (M_o):** es el valor de la variable que más se repite; tiene la ventaja de que se puede calcular para todo tipo de variable, pero el inconveniente de no ser suficientemente representativa cuando hay varios valores modales.

- **Mediana (M_e):** sólo se puede calcular para variable cuantitativa, ya que se obtiene como el valor de la variable que ocupa la posición central, una vez organizados los datos desde los valores más pequeños a más grandes de la variable; ésta posición se obtiene dividiendo entre dos el número de datos (cuando éstos son impares, tomando el cociente por exceso, pero cuando son pares hay dos posiciones medianas).

- **Media ($\bar{x}$):** sólo puede obtenerse para variable cuantitativa, ya que se obtiene como media aritmética de todos los valores de la variable, es decir, sumando todos los valores de la variable y dividiendo entre el número de datos, por lo que tiene en consideración todos los datos a los que representa:

-

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N}$$

Parámetros de dispersión: los principales son el rango o recorrido, la desviación media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

- **Rango o recorrido:** es el intervalo en el que se encuentran los valores de la variable; en la variable cualitativa se asocia al número de valores de la variable.

- **Desviación media (d_e):** mide lo que en promedio se diferencia, en valor absoluto, cada valor de la variable y la media de todos los datos, por lo que se obtiene así:

$$d_e = \frac{\sum f_i \cdot d_i}{N} = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N}$$

- **Desviación típica (σ):** es una forma alternativa de medir el promedio de las diferencias entre cada valor de la variable y la media de todos los datos, pero elevando estas diferencias al cuadrado (para evitar que las diferencias positivas se anulen con las negativas). Por ello se obtiene como la raíz cuadrada de la varianza (σ^2):

Varianza: $$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2$$ **Desviación típica:** $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2}$$

- **Coeficiente de variación (CV):** se calcula como la relación entre la desviación típica y la media y suele darse en forma porcentual:

$$CV(\%) = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100$$

El **coeficiente de variación** en realidad es el parámetro más adecuado para medir la representatividad que tiene media, ya que lo hace en forma de un porcentaje cuyo valor indica que, **cuanto menor sea, más se concentran los datos alrededor de la media** (y, por tanto, ésta será más representativa). Suele utilizarse para comparar series de medidas sobre diferentes aspectos o en distintas situaciones.

Para facilitar la aplicación de las anteriores expresiones matemáticas de los parámetros de centralización y dispersión, conviene **ampliar la tabla de frecuencias** con una serie de columnas, **según los parámetros que se deseen obtener**.

En el ejemplo de los pesos de los yogures, si se quisieran calcular **todos** los parámetros estadísticos, se podría ampliar la tabla de frecuencias anterior de esta forma:

Pesos (gramos)	Marcas de clase x_i	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Media	Dispersión			
							Desviación media		Desviación típica	
		f_i	Acumuladas F_i	$n_i(\%)$	Acumuladas $N_i(\%)$	$f_i \cdot x_i$	$d_i = \|x_i - \overline{x}\|$	$f_i \cdot d_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
[110,115)	112,5	3	3	12	12	337,5	9,0	27,0	12656,25	37969
[115,120)	117,5	6	9	24	36	705,0	4,0	24,0	13806,25	82838
[120,125)	122,5	10	19	40	76	1225,0	1,0	10,0	15006,25	150063
[125,130)	127,5	5	24	20	96	637,5	6,0	30,0	16256,25	81281
[130,135)	132,5	1	25	4	100	132,5	11,0	11,0	17556,25	17556
Totales		**25**	-----------	**100**	-----------	**3037,5**	-----------	**102,0**	----------	**369706**

Los parámetros de centralización y dispersión en este ejemplo serían los siguientes::

- **Rango**: $[110, 135)$ $gramos$
- **Moda**: el intervalo modal es $[120,125)$ $gramos$ y la moda $\mathbf{122,5}$ $\boldsymbol{gramos}$.

- **Mediana**: la posición mediana será $25:2 = 13^*$, es decir el valor de la variable que corresponda al puesto 13º, que viene dado por la frecuencia absoluta acumulada, F_i; como los valores entre el 10º y el 19º corresponden al intervalo $[120{,}125)\ gramos$, éste será el intervalo mediano y la **mediana** $\boldsymbol{122,5\ gramos}$ (no tienen por qué coincidir siempre moda y mediana).

A partir de los valores de la tabla se pueden obtener el resto de parámetros estadísticos:

- **Media**:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{3037,5}{25} = \boldsymbol{121,5\ gramos.}$$

- **Desviación media**:

$$\boldsymbol{d_e} = \frac{\sum f_i \cdot d_i}{N} = \frac{102,0}{25} = \boldsymbol{4,08\ gramos}$$

- **Desviación típica**:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{369706}{25} - 121,5^2} = \sqrt{26} = \boldsymbol{5,10\ gramos}$$

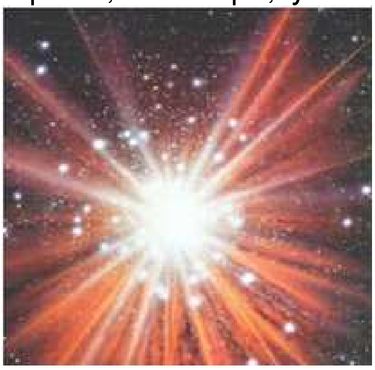
- **Coeficiente de variación**:

$$\boldsymbol{CV}(\%) = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{5,10}{121,5} \cdot 100 = \boldsymbol{4,2}\%$$

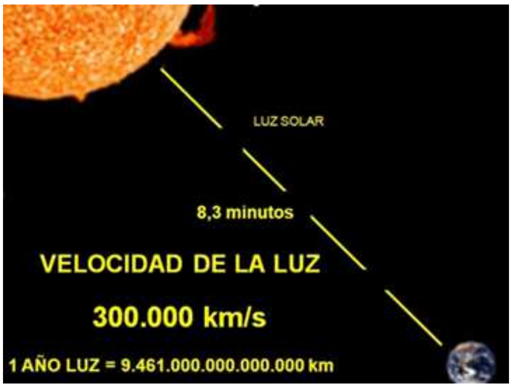
Los resultados indican que los datos están bastante concentrados en torno a la media, pero el porcentaje obtenido en el coeficiente de variación tiene especialmente validez cuando se compara con otra muestra estadística o con datos referidos a otra variable.
El hecho de que la desviación media y la desviación típica sean diferentes no quita validez al estudio; simplemente son formas diferentes de obtener el promedio en que se separan los valores obtenidos respecto del representante del conjunto de los datos (la media).

1. EL UNIVERSO

Todo lo que nos rodea (materia, energía, espacio y tiempo) constituye el **Universo** que, a pesar su inmensidad, no es infinito. Con la tecnología actual no es posible determinar con precisión ni su verdadero tamaño, ni su contenido, hasta el punto de que la llamada **materia oscura** (la que no se puede observar) representa al menos el 90% de su masa.
La **Tierra** es uno de los planetas que giran alrededor del **Sol**, una estrella más de los miles de millones de estrellas que forman la **Vía Láctea**, galaxia en la que el **Sistema Solar** se encuentra en uno de sus brazos, y ésta es una más de los miles de millones de galaxias que forman el Universo. Incluso con estos datos es difícil hacerse una idea de la pequeñez de nuestro planeta que, cuyo tamaño es unas 100 veces menor que el del Sol, pero minúsculo en comparación con el Universo.
La ciencia explica el **origen del Universo** con la **teoría del Big Bang** (la Gran Explosión), que parte de la idea de que antes de que existiera el Universo no había ni materia, ni espacio, ni tiempo, y todo lo que ahora lo forma estaría concentrado en un punto (el "huevo cósmico"); hace **unos 13.500 millones de años** se produjo un estallido que, en muy poco tiempo, formó todas las partículas de materia existentes ahora y, posteriormente, las estrellas y galaxias. Como consecuencia de esta explosión, todas las estrellas se siguen separando unas de otras, haciendo que el Universo se expanda continuamente, tal como demuestra el desplazamiento hacia el rojo de la luz procedente de las estrellas (un efecto similar al del sonido de un coche cuando se aleja, que se hace más grave).



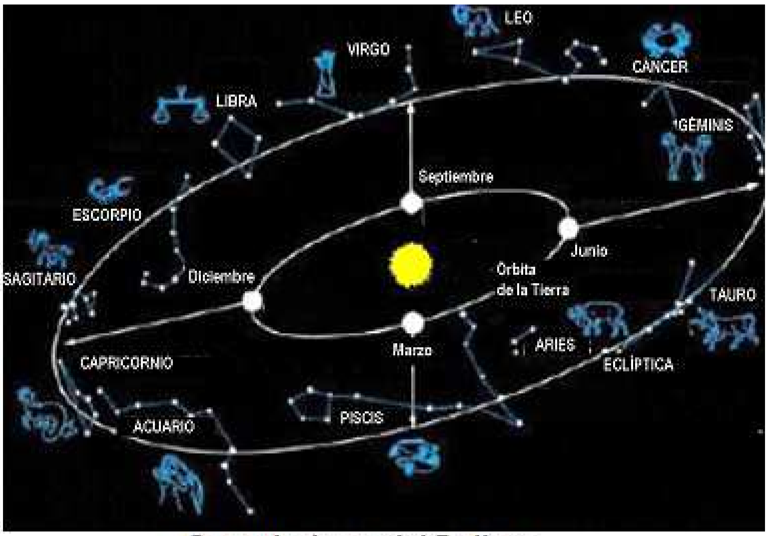
La enormidad del Universo hace que las distancias se midan con unidades especiales, como la **unidad astronómica** (**ua**), que es la distancia media entre el Sol y la Tierra (unos 150 millones de kilómetros), o el **año luz**, que es la distancia que recorre la luz en un año. Teniendo en cuenta que la luz viaja a 300.000 km/s, resulta que desde el Sol tarda 8,3 minutos en llegar a la Tierra, y que el año luz exactamente es 9.461.000 millones de kilómetros. El planeta más alejado del Sol (Plutón) se encuentra a 39 ua y la estrella más cercana (Alfa Centauro) está a 4,3 años luz de distancia (esto significa que la vemos tal y como era hace 4,3 años).



Las estrellas son los únicos cuerpos del Universo que emiten luz. Están formados por masas de gases (principalmente hidrógeno y helio) a muy alta presión y temperatura, lo que permite que ocurran reacciones de **fusión nuclear**, en las que se emite una enorme cantidad de energía radiante (como la luz) y partículas ionizadas.
Excepto el Sol, que es mucho más cercana, las demás estrellas están muy lejos de la Tierra, por lo que sólo se pueden observar por la noche como pequeños puntos luminosos.
Debido a la rotación de la Tierra, la mayoría de las estrellas se observan realizando movimientos circulares **de Este a Oeste** a lo largo de la noche, similares al realizado por el Sol durante el día. Aunque a efectos prácticos, año tras año las estrellas no cambian sus posiciones en la esfera celeste, en realidad se alejan unas de otras a velocidades muy grandes, no apreciables a corto plazo por las enormes distancias a las que se encuentran, pero sí después de siglos o milenios.

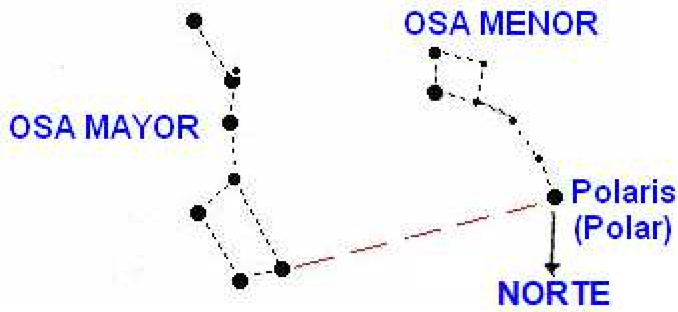
Las galaxias son agrupaciones de infinidad de estrellas que, debido a la atracción gravitatoria, giran alrededor de un agujero negro (una antigua estrella que ha agotado su combustible y atrae todo lo que hay a su alrededor, incluso la luz), junto con astros sin luz propia, nebulosas (nubes brillantes de gas y polvo cósmico) y otros restos de antiguas estrellas.
En el Universo hay centenares de miles de millones de galaxias, como la **Vía Láctea**, que tiene forma espiral y en uno de sus brazos (el de Orión) se encuentra el Sistema Solar. Es una galaxia muy grande, ya que mide unos 100.000 años luz y contiene unos 100.000 millones de estrellas. Su nombre (que significa "Camino de la leche") se lo dieron los romanos por su aspecto, ya que en una noche despejada se puede observar a simple vista como una franja blanquecina que cruza el cielo.

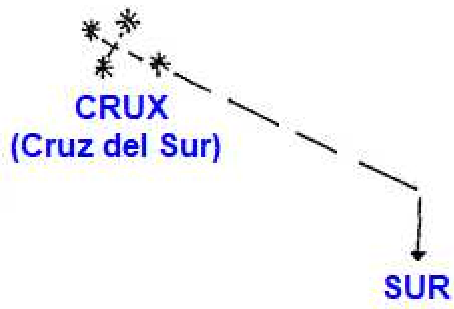
Las **constelaciones** son agrupaciones de estrellas que, aunque entre sí estén muy alejadas y sean independientes, sobre la esfera celeste se observan por la noche como figuras que desde la antigüedad fascinaron a los humanos y vieron en ellas la personificación de dioses, animales u objetos. De las 88 constelaciones existentes, las más conocidas son las doce del **Zodiaco**, que se encuentran en el plano de la órbita de terrestre sobre el fondo de estrellas fijas, por lo que cada una de ellas destaca en el cielo nocturno en los diferentes meses del año.



Constelaciones del Zodiaco

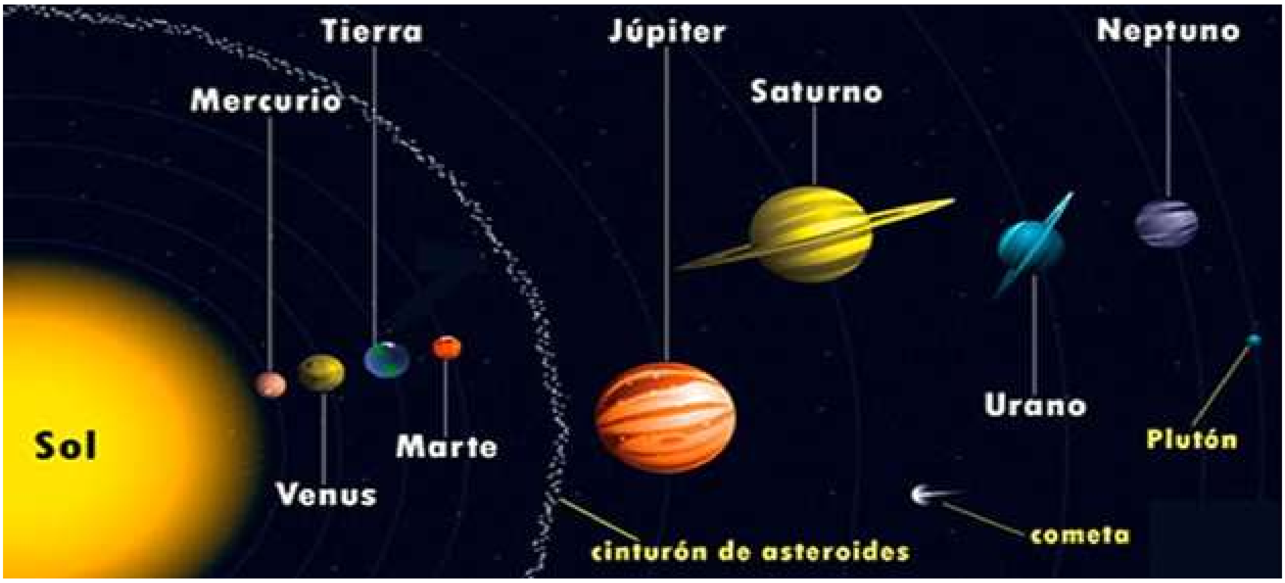
Algunas constelaciones permiten localizar astros que sirven para orientarse en la oscuridad. En el hemisferio Norte, la **Osa Mayor** (también llamada carro de Santiago), se identifica fácilmente y, al prolongar visualmente cinco veces la longitud de su tramo posterior, permite localizar la **Estrella Polar** que, por encontrarse en la prolongación del eje de rotación de la Tierra, siempre indica el Norte sobre el horizonte. En el hemisferio Sur, ocurre lo mismo con **Crux** (más conocida como Cruz del Sur), constelación con esta forma, en la que, partiendo de la base del tramo principal, al prolongar visualmente su longitud cinco veces, apunta hacia un punto que indica el Sur sobre el horizonte.



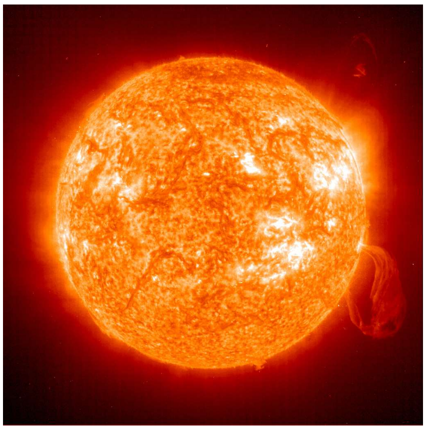


2. EL SISTEMA SOLAR

Está formado por el Sol y millones de astros (planetas, planetoides, asteroides, cometas y satélites) que giran alrededor de él.



El Sol es una estrella mediana que representa el 99% de la masa de todo el Sistema Solar. La intensa fuerza de atracción gravitatoria que ejerce sobre el resto de los componentes del Sistema Solar permite que éstos giren a su alrededor. Por ser la estrella más cercana a la Tierra, la radiación que emite en forma de luz y calor impide ver el resto de los astros durante el día, pero proporciona la energía necesaria para la vida.



Desde la Tierra sólo se ve la parte externa del Sol, la **fotosfera**, que está a unos 6.000ºC, aunque tiene zonas más frías, las **manchas solares**, que están a unos 4.000ºC. Las condiciones extremas de presión y temperatura en su interior (hasta 15.000.000°C y 340.000 atmósferas) permiten que haya reacciones de **fusión nuclear**, que producen enormes cantidades de energía, que llega hasta la superficie solar por radiación.

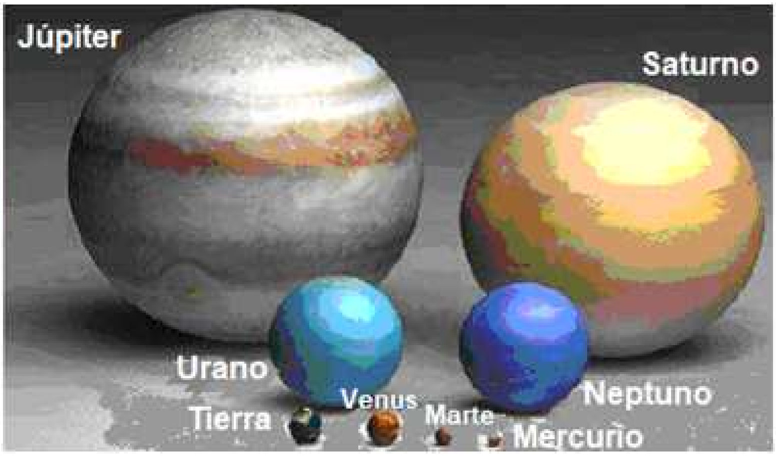
El Sol se formó hace unos 4.650 millones de años y tiene combustible (hidrógeno) para que las reacciones en su interior continúen 5.000 millones de años más.

Planetas y **planetoides** (también llamados planetas enanos) son cuerpos esféricos sin luz propia (reflejan la procedente del Sol), diferenciándose ambos tipos por el tamaño y lejanía al Sol. Hay ocho planetas (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) y unos cinco planetoides, entre los que está Plutón, que se consideró hasta no hace mucho el noveno planeta del Sistema Solar (y el más alejado del Sol).

Estos dos tipos de cuerpos planetarios realizan un movimiento de **traslación** (giro alrededor del Sol en una órbita elíptica, casi circular) y otro de **rotación** (giro alrededor de un eje que pasa por su centro). El tiempo para completar una vuelta alrededor del Sol es el **año**, mientras que el **día** es el correspondiente a una vuelta sobre el eje de rotación (ambos diferentes para cada planeta). El hecho de que el eje de rotación de los planetas no sea perpendicular a su plano de traslación, hace que los dos hemisferios no estén siempre igual de iluminados, lo que da lugar a las estaciones.

Los planetas se clasifican en **interiores** (o rocosos) y **exteriores** (o gaseosos):

- **Los planetas interiores** son los más cercanos al Sol (Mercurio, Venus, Tierra y Marte). Se les llama también **planetas rocosos** o terrestres porque tienen la superficie sólida y, excepto Mercurio, atmósfera más o menos significativa.
- **Los planetas exteriores** son los más alejados del Sol (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno). Se conocen también como **planetas gaseosos** porque prácticamente están formados por los gases hidrógeno y helio.



Los **asteroides** son objetos rocosos o metálicos de tamaños inferiores al de los planetoides que orbitan alrededor del Sol. Los más grandes tienen formas esféricas, pero los de menos de 160 km son alargados o irregulares..


La mayoría se encuentran entre Marte y Júpiter, en el **cinturón de asteroides principal**, pero los hay con órbitas más allá de Saturno. Cuando en su giro orbital se acercan al Sol, la atracción gravitatoria terrestre hace que algunos lleguen a chocar contra nuestro planeta, transformándose en **meteoritos** al entrar en la atmósfera, ya que el rozamiento con el aire aumenta su temperatura hasta que se encienden.

Los **cometas** son cuerpos sólidos de pequeño tamaño que giran alrededor del Sol con órbitas muy excéntricas que llegan más allá de la órbita de Plutón, en el llamado cinturón de Kuiper. Su núcleo o coma está formado por polvo y hielo de agua, metano y amoniaco, sustancias que se subliman al aproximarse al Sol en su órbita formando la cola característica, que no existe en la mayor parte de su recorrido a lo largo de los confines del Sistema Solar.

Los **satélites** son cuerpos de tamaño variable que giran alrededor de un planeta o planetoide al que están asociados, trasladándose alrededor del Sol junto a éste, además de rotar sobre un eje que pasa por su centro. La Tierra sólo tiene un satélite (la Luna), pero los planetas masivos tienen muchos debido a la intensa atracción gravitatoria que ejercen. En el siguiente cuadro se resumen las principales características de los ocho planetas y Plutón, incluyendo el número de satélites (la columna R/T es el valor relativo respecto a la misma propiedad en el planeta Tierra):

Planeta	**Radio ecuatorial**		**Distancia al Sol**		**Rotación**		**Traslación**		**Número de satélites**
	km	***R/T***	**10^6 km**	***R/T***	**horas**	***R/T***	**Total**	***R/T***	
Mercurio	**2.440**	*0,38*	**57,91**	*0,4*	**58,6 días**	*58,6*	**87,97 días**	*0,24*	**0**
Venus	**6.052**	*0,95*	**108,20**	*0,7*	**-243 días**	*-243*	**224,7 días**	*0,62*	**0**
Tierra	**6.378**	*1,00*	**149,60**	*1,0*	**23,93 horas**	*1*	**365,256 días**	*1,00*	**1**
Marte	**3.397**	*0,53*	**227,94**	*1,5*	**24,62 horas**	*1.03*	**686,98 días**	*1,88*	**2**
Júpiter	**71.492**	*11,21*	**778,33**	*5,2*	**9,84 horas**	*0,41*	**11,86 años**	*11,86*	**63**
Saturno	**60.268**	*9,45*	**1.429,40**	*9,6*	**10,23 horas**	*0,43*	**29,46 años**	*29,46*	**33**
Urano	**25.559**	*4,01*	**2.870,99**	*19,2*	**17,9 horas**	*0,75*	**84,01 años**	*84,01*	**27**
Neptuno	**24.746**	*3,88*	**4.504,30**	*30,1*	**16,11 horas**	*0,67*	**164,8 años**	*164,8*	**13**
Plutón	**1.160**	*0,18*	**5.913,52**	*39,5*	**-6,39 días**	*-6,39*	**248,54 años**	*248,54*	**1**

3. EL PLANETA TIERRA

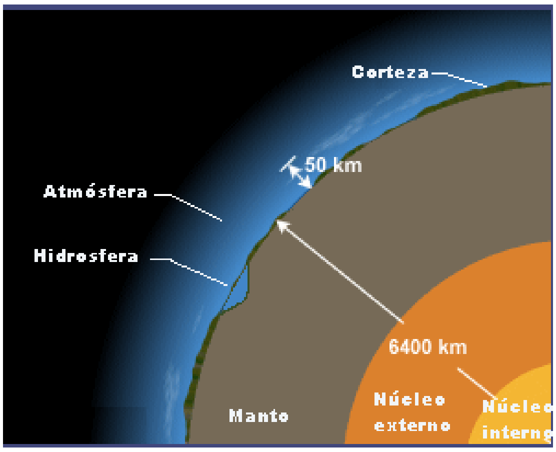
Según la **teoría de acreción**, nuestro planeta se formó hace unos 4.500 millones de años como consecuencia de la acumulación de polvo cósmico, y de la colisión de asteroides y planetésimos, lo que hizo que en sus primeras etapas estuviera formada por materiales rocosos fundidos. A medida que se iba enfriando, la superficie externa se solidificó, y el vapor de agua que retenía se condensó en la superficie, ocupando las partes más bajas y dando así lugar a los océanos, mientras que el resto de los gases (dióxido de carbono, nitrógeno, metano y amoniaco) formaron la atmósfera primitiva.
Los complejos cambios que ocurrieron gradualmente dieron a la Tierra sus actuales características, que se pueden resumir así:

- Es el tercer planeta del Sistema Solar y el mayor de los planetas rocosos, lo que permite que su gravedad retenga una capa gaseosa rica en oxígeno (la atmósfera) que dispersa la luz y absorbe calor, evitando que se caliente demasiado de día y que se enfríe de noche.

- Su forma es esférica, pero achatada unos 21 kilómetros en los polos, siendo su radio ecuatorial 6.378 kilómetros (es un **geoide de revolución**).

- Realiza un movimiento de **rotación** en sentido Oeste-Este, con el que da una vuelta cada día sobre el eje que pasa por los polos, y otro de **traslación** en una órbita elíptica a un promedio de 150 millones de kilómetros del Sol, completando una vuelta aproximadamente en un año.

- La composición química es variada, con materiales distribuidos en capas, según su densidad y estado de agregación, distinguiéndose una capa externa gaseosa y rica en oxígeno (la **atmósfera**), que se asienta sobre otra de agua líquida (la **hidrosfera**) y ésta sobre una formada por rocas y minerales (la **geosfera**), sólida en la parte superior y la más interna (la **corteza** y el **núcleo**, respectivamente), pero parcialmente fundida en la zona intermedia (el **manto**).



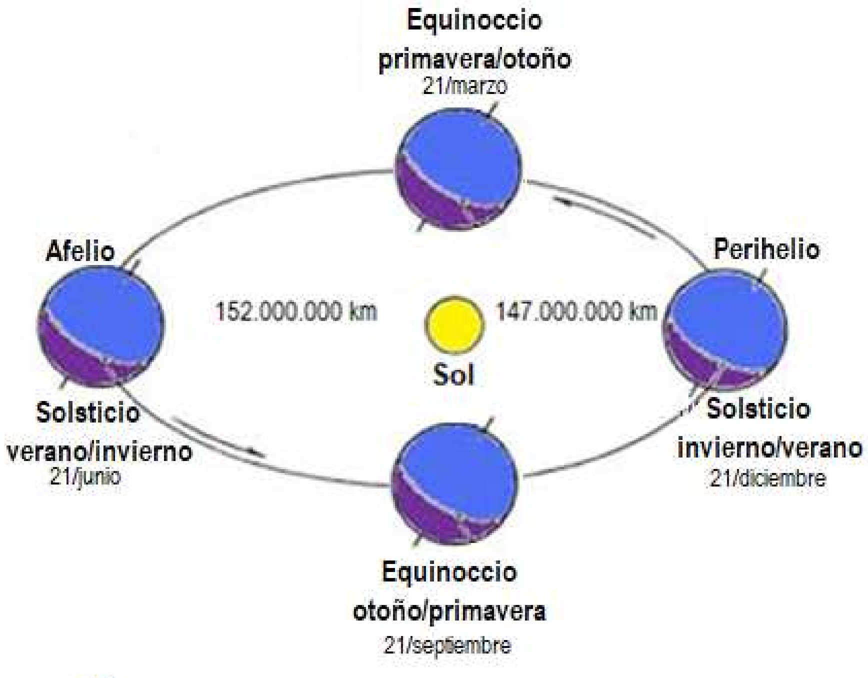
- El 70% de su superficie está cubierta por mares y océanos, en los que la gran cantidad de agua acumulada contribuye a que las temperaturas del planeta sean moderadas, debido a la elevada capacidad calorífica del agua y a la dinámica de los procesos de evaporación y condensación de esta sustancia que, movidos por la energía procedente del Sol, constituyen el llamado **ciclo del agua**, en el que el agua que se evapora en toda la superficie forma nubes que acaban produciendo precipitaciones en forma de lluvia y de nieve, que alimentan glaciares, lagos, aguas subterráneas y ríos, y éstos acaban devolviendo el agua líquida a los mares y océanos.

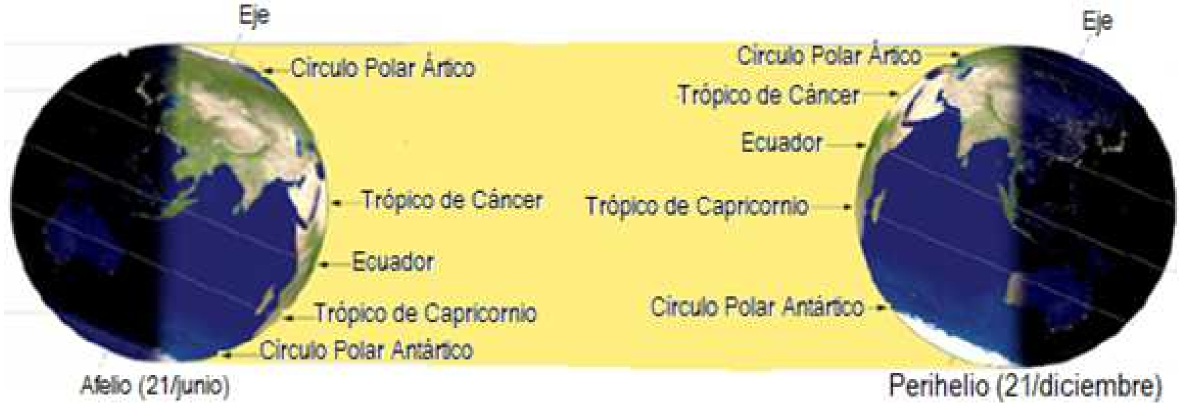
3.1. LOS MOVIMIENTOS DE LA TIERRA

La Tierra realiza simultáneamente tres movimientos giratorios: la **rotación** alrededor del eje que pasa por sus polos, que da lugar a la sucesión de días y noches, la **traslación** alrededor del Sol, que da lugar a la sucesión de las estaciones del año, y el **giro con todo el Sistema Solar** alrededor del centro de la galaxia, que no produce fenómenos apreciables en la vida cotidiana.

La traslación alrededor del Sol se produce en una órbita elíptica cuya excentricidad (achatamiento) hace que la Tierra esté más cercana al Sol a principios de enero (**perihelio**) y más alejada a principios de julio (**afelio**). Los dos hemisferios terrestres no están iluminados uniformemente a lo largo del año porque el eje de rotación de la Tierra está inclinado 23,5º respecto al plano de traslación (eclíptica), dando así lugar a dos solsticios y dos equinoccios:

- En los **equinoccios** los rayos solares inciden perpendicularmente sobre el ecuador (no se forman sombras en esta zona) y ambos hemisferios tienen la misma exposición al Sol, con 12 horas de día y otras 12 de noche.
- En los **solsticios** la luz del Sol incide perpendicularmente en uno de los trópicos a 23,5º de latitud (el de Cáncer al Norte en el afelio, o el de Capricornio al Sur en el perihelio), produciéndose la máxima diferencia en la duración de los períodos de luz y oscuridad, llegando a haber 24 horas de luz en uno de los polos, mientras que en el opuesto hay 24 horas de oscuridad, fenómeno que se produce en latitudes superiores a los 66,5º de los círculos polares (ártico en el hemisferio Norte y antártico en el Sur).





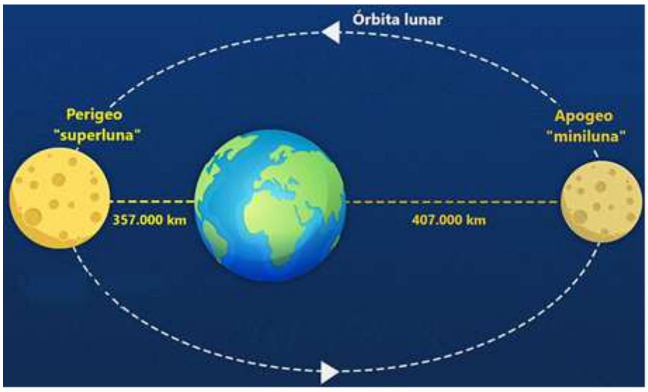
Aparte de la diferente duración de los días y noches a lo largo del año, la inclinación del eje de rotación terrestre tiene como consecuencia que también varíe la cantidad de energía que llega a las diferentes zonas del planeta, produciendo así la sucesión de las cuatro estaciones (primavera, verano, otoño e invierno), que están invertidas en ambos hemisferios:

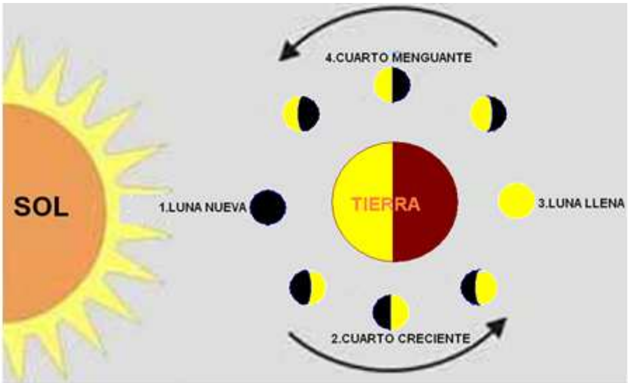
- **En el hemisferio Norte o septentrional** el solsticio de verano se produce cuando la Tierra pasa por el afelio (aproximadamente el 21 de junio), mientras que el solsticio de invierno ocurre en el perihelio (aproximadamente el 21 de diciembre). Los equinoccios de primavera y de otoño se producen, respectivamente, los días 21 de marzo y 21 de septiembre, aproximadamente.
- **En el hemisferio Sur o austral** el solsticio de verano se produce cuando la Tierra pasa por el perihelio (aproximadamente el 21 de diciembre), mientras que el solsticio de invierno ocurre en el afelio (aproximadamente el 21 de junio). Los equinoccios de primavera y de otoño se producen, respectivamente, los días 21 de septiembre y 21 de marzo, aproximadamente. Como consecuencia de que en el verano austral se produce en el perihelio (momento de máxima proximidad de la Tierra al Sol) y que el invierno en el afelio (momento de mayor alejamiento), estas estaciones son más extremas en el hemisferio Sur.

3.2. LA LUNA

Es un satélite de la Tierra que gira alrededor de ésta en una órbita elíptica, inclinada 5º respecto del plano de la órbita terrestre, a una media de 384.000 km de distancia, con un punto más próximo (perigeo) y otro más alejado (apogeo). Comparada con la Tierra, su masa es 81 veces menor y su radio algo más de la cuarta parte, resultando así una aceleración gravitatoria en la superficie seis veces menor que en nuestro planeta, por lo que no tiene atmósfera y todos los meteoritos que llegan a ella chocan contra ella intactos y forman los característicos cráteres denominados “mares”.

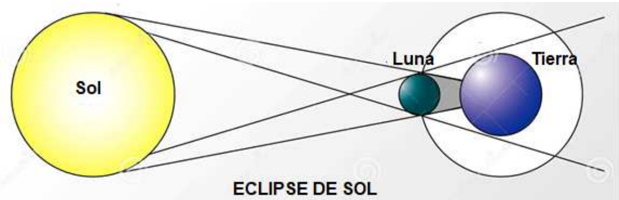
La Luna tarda el mismo tiempo en completar su órbita alrededor de la Tierra que en rotar sobre sí misma (algo más de 27 días terrestres), por lo que desde nuestro planeta sólo se puede ver iluminada por el Sol una de sus caras, aunque de forma variable según la posición de éste respecto de las de la Tierra y la Luna, dando así lugar a las **fases lunares** que, debido a la combinación del movimiento de la Luna con el de la Tierra, se repiten aproximadamente cada 29 días (**mes Lunar**).

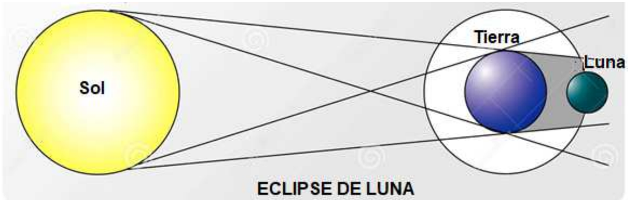




En la fase de **Luna nueva** la Luna está entre la Tierra y el Sol, por lo que la superficie Lunar queda oculta, mientras que en **Luna llena** es la Tierra la que se encuentra entre el Sol y la Luna, observándose completamente iluminada la superficie de la Luna. Los **cuartos creciente y menguante** son fases de transición entre las dos anteriores, en las que la Luna, la Tierra y el Sol forman un ángulo recto, por lo que se ve iluminada sólo la mitad de la superficie de la Luna (en creciente forma una D y en menguante una C).

Debido a que el plano de traslación de la Luna está inclinado 5º respecto del plano de traslación de la Tierra (eclíptica), sólo es posible que el Sol, la Luna y la Tierra estén alineados en las zonas próximas a los equinoccios, en las que se pueden producir los **eclipses** cuando uno de los tres cuerpos anteriores queda oculto por la presencia de otro:

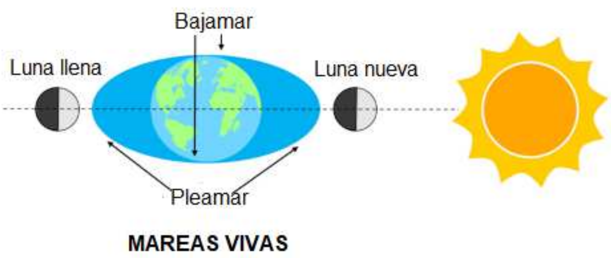




El eclipse de Sol se produce en fase de Luna nueva cuando la Luna se interpone entre la Tierra y el Sol, quedando éste total o parcialmente oculto durante el día. Sin embargo, el **eclipse de Luna** ocurre en fase de Luna llena cuando la Tierra se interpone entre el Sol y la Luna, ocultando su sombra total o parcialmente la cara iluminada de la Luna.

La considerable masa de la Luna y su proximidad a la Tierra permiten que la atracción gravitatoria entre ambos cuerpos se aprecie sobre las masas de agua de los mares y océanos, produciendo ascensos y descensos periódicos del nivel de las aguas de éstos que se conocen como **mareas**: a lo largo del día, la cara de la Tierra situada frente a la Luna experimenta una mayor atracción gravitatoria que hace subir el nivel del agua de los mares (marea alta o **pleamar**), a expensas de las zonas situadas en ángulo recto, que tendrán marea baja (**bajamar**); también la cara de la Tierra más alejada de la Luna se encontrará en pleamar porque allí las masas de agua se verán menos atraídas hacia la superficie terrestre por recibir menos atracción de la Luna. Debido a la rotación de la Tierra, estas zonas se intercambian cada ocho horas, aproximadamente, aunque acumulando un retraso diario de una hora debido a la traslación de la Luna en el mismo sentido que la rotación terrestre.

En las fases de Luna llena o Luna nueva, a la atracción de la Luna, se añade la atracción gravitatoria del Sol que, aunque menor que la de ésta, produce mareas más intensas, conocidas como **mareas vivas**, mientras que en las fases de cuarto creciente o menguante dicho efecto no ocurre y entonces se denominan **mareas muertas**.

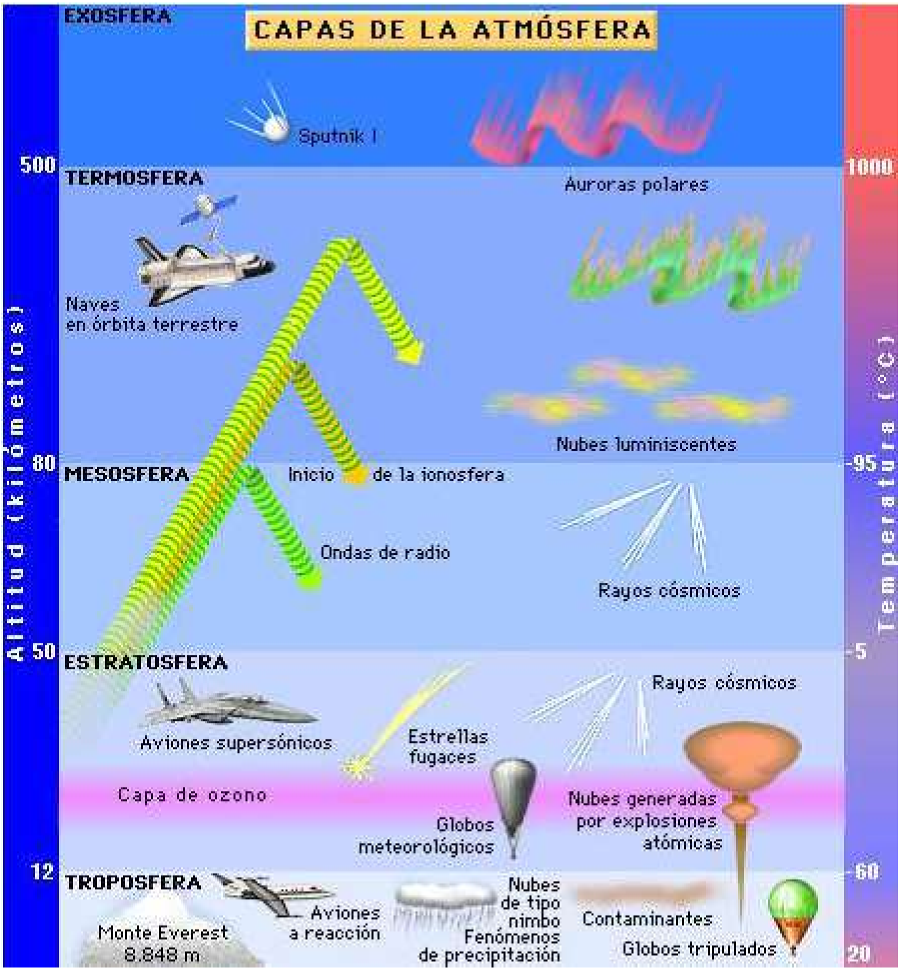


Como las mareas ocurren por desplazamiento de masas de agua, en los mares pequeños o cerrados, como el mar Mediterráneo, son menos pronunciadas que en los abiertos, como el mar Cantábrico.

3.3. LA ATMÓSFERA

Es la capa gaseosa más externa de la Tierra. Contiene un 78% de nitrógeno (N_2), un 21% de oxígeno (O_2) y el 1% restante es dióxido de carbono (CO_2), vapor de agua (H_2O), gases nobles (He, Ar), hidrógeno (H_2) y ozono (O_3).
Debido a la atracción gravitatoria, la densidad de la atmósfera disminuye gradualmente con la altitud, hasta prácticamente desaparecer a unos $1.000\ km$ de la superficie, lo que posibilita la existencia de diferentes capas:

- **Troposfera**: está formada por los primeros 10 km de altura, y en ella se desarrollan los fenómenos atmosféricos conocidos.
- **Estratosfera**: se encuentra entre los 10 y los 50 km de altura, y se caracteriza por la escasa existencia de viento, lo que permite que haya diferentes capas superpuestas, como la capa de ozono (O_3) a 25 km de altitud, de gran importancia para la vida en la Tierra, ya que hace de filtro para las nocivas radiaciones ultravioleta emitidas por el Sol.
- **Mesosfera**: se encuentra entre los 50 y 80 km de altura, y recibe todas las radiaciones de alta energía.
- **Ionosfera** o **termosfera,** y la **exosfera**: son las capas más alejadas de la superficie, llegando a alcanzar temperaturas de entre 100º y 300º C.

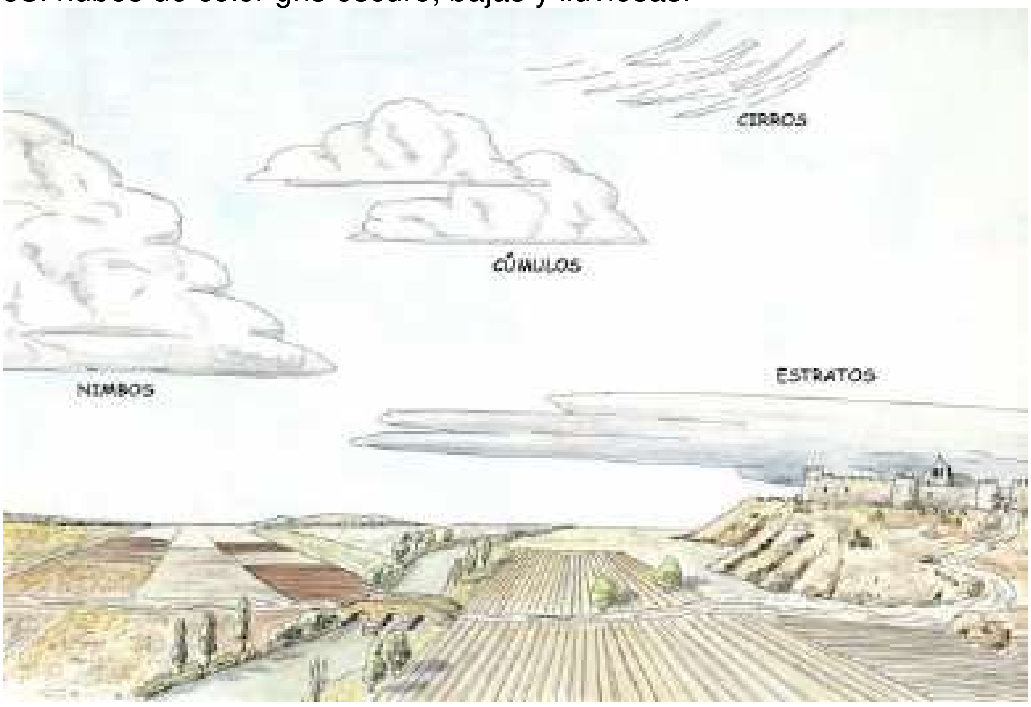


La cantidad de energía del Sol que llega a las diferentes zonas del planeta varía a lo largo del día y del año, por lo que en la hidrosfera y la troposfera se producen diferencias de temperatura que, a su vez, son la causa de que también haya diferencias de presión y humedad del aire. Todo ello desencadena el desplazamiento de grandes masas de agua

de los océanos y de aire troposférico para redistribuir la energía recibida y unificar las características del agua y del aire. El resultado es la aparición de corrientes marinas, oleaje y **fenómenos meteorológicos** como el viento, las nubes, la niebla, las precipitaciones (lluvia, granizo y nieve), el rocío y la escarcha, entre otros, que, junto con las características del aire (temperatura, presión, velocidad del viento, humedad, etc.) determinan en cada lugar el **tiempo atmosférico** y el **clima**, conceptos que se diferencian en que el primero se refiere a las condiciones de la atmósfera en un momento dado, mientras que el segundo es el promedio del estado atmosférico a largo plazo.
Además de los meteorológicos, en la atmósfera también ocurren otros fenómenos físicos como las auroras polares, las tormentas eléctricas y el arco iris.

El **viento** es un desplazamiento de aire causado por las diferencias de presión y temperatura entre diferentes zonas, lo que hace que se mueva desde las zonas más frías (aire más denso) hacia las zonas más cálidas (con aire más dilatado y menos denso).
Al ascender hacia capas más altas de la atmósfera, el aire caliente se va enfriando progresivamente, por lo que el vapor de agua que contiene se condensa como gotitas microscópicas formando las **nubes**, que suelen contener también pequeños cristales de hielo que formados por enfriamiento del vapor de agua, pudiéndose distinguir estos tipos:

- **Cirros:** nubes de aspecto filamentoso en la zona alta de la troposfera, con un espesor mínimo y que no provocan sombras.
- **Cúmulos:** son las clásicas nubes, de color blanco brillante en las zonas expuestas al Sol y gris oscuro en las de sombra.
- **Estratos:** son bancos uniformes de nubes que traen lluvia y llovizna, muy extendidas y de estructura uniforme,
- **Nimbos**: nubes de color gris oscuro, bajas y lluviosas.



Cuando las gotitas de agua se van reuniendo, forman gotas cada vez mayores que se sostienen en el aire gracias al viento, pero si se hacen muy pesadas, el agua cae por gravedad y da lugar a **precipitaciones** en forma líquida (**lluvia**) o sólida si la temperatura es inferior a 0º C (**nieve** o **granizo**). Cuando el viento es fuerte, puede arrastrar gotas de agua de mayor tamaño que, al congelarse, dan lugar a **granizo o pedrisco**, que puede alcanzar hasta varios centímetros de diámetro.

La **niebla** es en realidad una nube tan baja que toca el suelo, ya que está formada por un conjunto de gotas microscópicas de agua dispersas que flotan en el aire, reduciendo más la visibilidad cuando están más juntas (niebla más espesa). Estas gotitas se depositan en forma líquida sobre el mar, superficies de vegetales u otras superficies sólidas; si la temperatura baja de 0ºC, lo hacen en forma sólida como pequeños cristales de hielo, dando lugar a la **cencellada**.

El **rocío** es otro fenómeno de condensación del vapor de agua que se produce sobre la superficie terrestre cuando se enfría el aire, pero con temperaturas superiores a 0ºC. Se caracteriza por la aparición de gotitas de agua líquida que se depositan sobre los objetos y cuerpos expuestos a la intemperie, o que caen desde alturas inferiores a un metro. Suele ocurrir sobre vegetales u objetos metálicos, que se enfrían con facilidad en las noches claras y serenas.

La **escarcha** o **helada** es un fenómeno similar al rocío, pero ocurre cuando la temperatura del aire es inferior a 0ºC, por lo que se depositan directamente pequeños cristales de hielo (como agujas, plumas o escamas), sobre objetos cuya superficie se enfría con facilidad (vegetales y objetos metálicos).

3.4. LA HIDROSFERA

Es el conjunto de las aguas que cubren parte de la superficie terrestre, la zona externa del planeta en la que existe agua en forma gaseosa, líquida o sólida (superficial o subterránea). La mayor parte se encuentra en estado líquido, formando los **océanos** y, en las zonas continentales, **ríos**, **lagos** y **aguas subterráneas**. En estado sólido la podemos encontrar en los casquetes polares y en las cumbres de las montañas; en estado gaseoso (vapor de agua) lo encontraríamos en la atmósfera formando las nubes.
La hidrosfera terrestre es, también, el sustento de la vida, que aparece en los océanos y masas de agua, y un porcentaje muy alto de todos los seres vivos es agua (entre el 60% y el 75% del peso de los seres vivos).
Aproximadamente un 95% del agua se encuentra en los océanos y solamente un 5% en zonas continentales. Pero no toda esta agua es aprovechable.

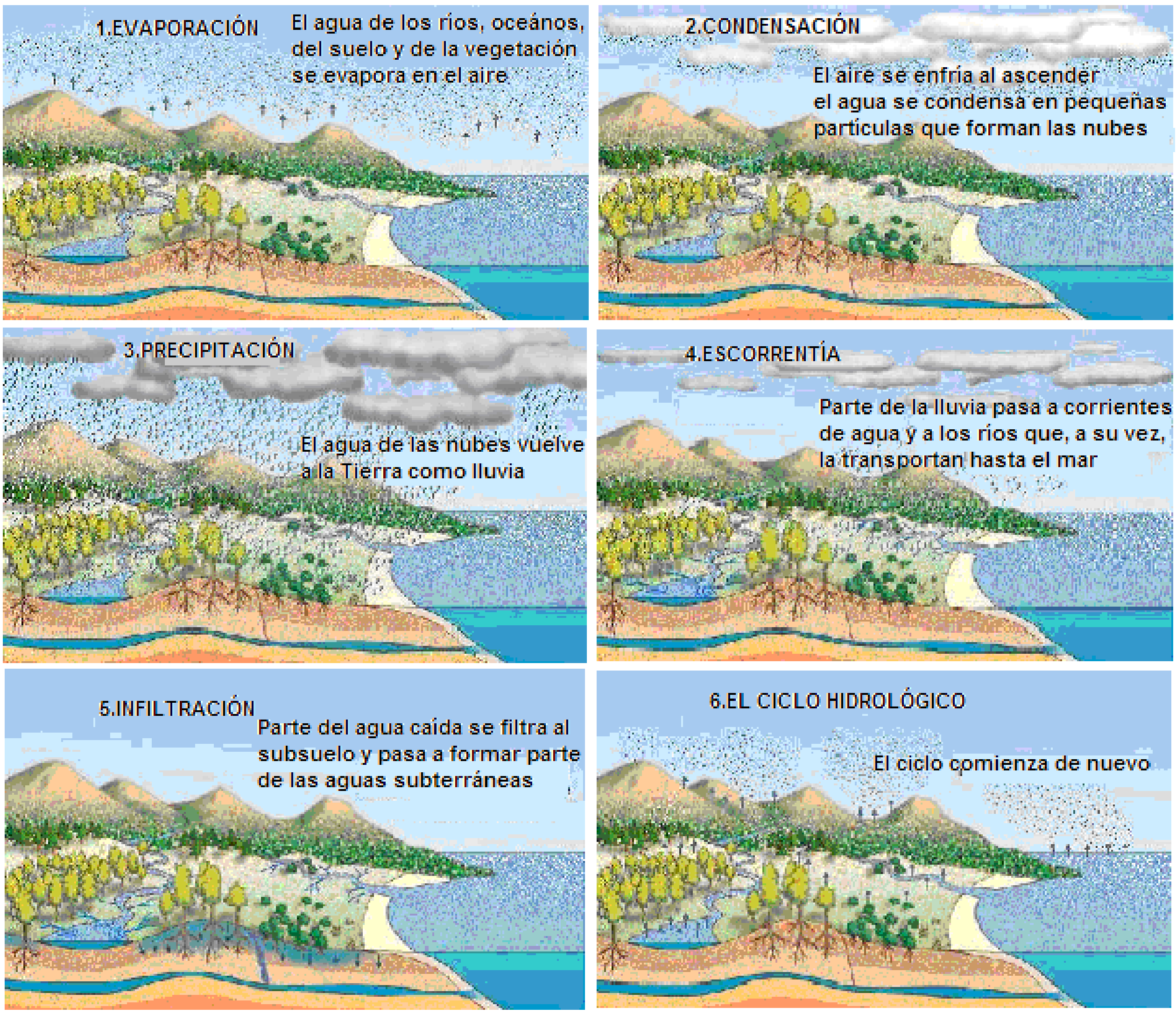
El **ciclo del agua** es el conjunto de procesos que se producen entre la atmósfera y la superficie terrestre, responsables de que el agua vaya pasando de unos a otros estados de agregación, de modo que, después de cierto tiempo, el resultado final es que el agua acaba en la forma en la que se encontraba en el punto de partida.
Aunque el ciclo hidrológico es sumamente complejo, en general, puede resumirse en las siguientes etapas:
1. **Evaporación**: el Sol, que es el “motor” que mueve este complicado ciclo, suministra la energía necesaria para calentar las masas de agua líquida del planeta (océanos, mares y ríos), evaporando continuamente enormes cantidades de agua, que pasan al aire como vapor de agua.
2. **Condensación**: una vez en el aire, el vapor de agua es llevado a las capas superiores de la atmósfera por corrientes de aire ascendentes y allí la menor temperatura causa que se condense y forme las nubes.
3. **Precipitación**: las corrientes de aire mueven las nubes por todo el globo; cuando las partículas de nube colisionan, crecen y caen en forma de precipitación, parte de la cual es

en forma de **nieve**, que se acumula en capas de hielo y en los glaciares, que pueden almacenar agua congelada durante millones de años; en los climas más cálidos, el agua cae en forma de **lluvia** o de nieve que se funde y se derrite cuando ascienden las temperaturas, por lo que el agua corre sobre la superficie del terreno, provocando a veces inundaciones.

4. **Escorrentía**: la mayor parte de las precipitaciones caen en los océanos o sobre la Tierra, donde, debido a la gravedad, corre sobre la superficie como escorrentía superficial. Una parte de esta escorrentía alcanza los ríos en las depresiones del terreno, siendo transportada de vuelta a los océanos. El agua de escorrentía y el agua subterránea que brota hacia la superficie, se acumula y almacena en los lagos de agua dulce.

5. **Infiltración**: no toda el agua de lluvia fluye hacia los ríos, ya que una gran parte es absorbida por el suelo como infiltración; parte de esta agua permanece en las capas superiores del suelo, y vuelve a los cuerpos de agua y a los océanos como descarga de agua subterránea. Otra parte del agua subterránea encuentra aperturas en la superficie terrestre y emerge como manantiales de agua dulce. El agua subterránea que se encuentra a poca profundidad, es tomada por las raíces de las plantas y transpirada a través de la superficie de las hojas, regresando a la atmósfera. Otra parte del agua infiltrada alcanza las capas más profundas de suelo y recarga los acuíferos, los cuales almacenan grandes cantidades de agua dulce por largos períodos de tiempo.

6. **Ciclo del agua**: a lo largo del tiempo, esta agua continúa moviéndose, aunque parte de ella retornará a los océanos, donde el ciclo del agua comienza nuevamente.

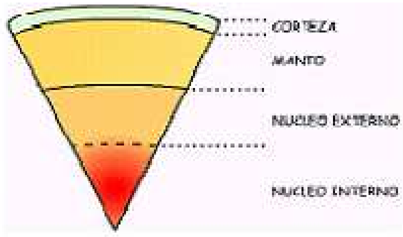


3.5. LA GEOSFERA

Es la parte sólida de la Tierra que comprende los $6.370\ km$ existentes entre la superficie del planeta y su centro. Del análisis de las ondas que se producen en los terremotos, además de otras técnicas, se ha llegado a la conclusión de que no es homogénea ni en composición ni en características físicas, distinguiéndose una serie de capas concéntricas a medida que se desciende en profundidad.

Partiendo de la superficie terrestre y descendiendo hacia su interior, nos encontramos con tres capas: **corteza**, **manto** y **núcleo**.

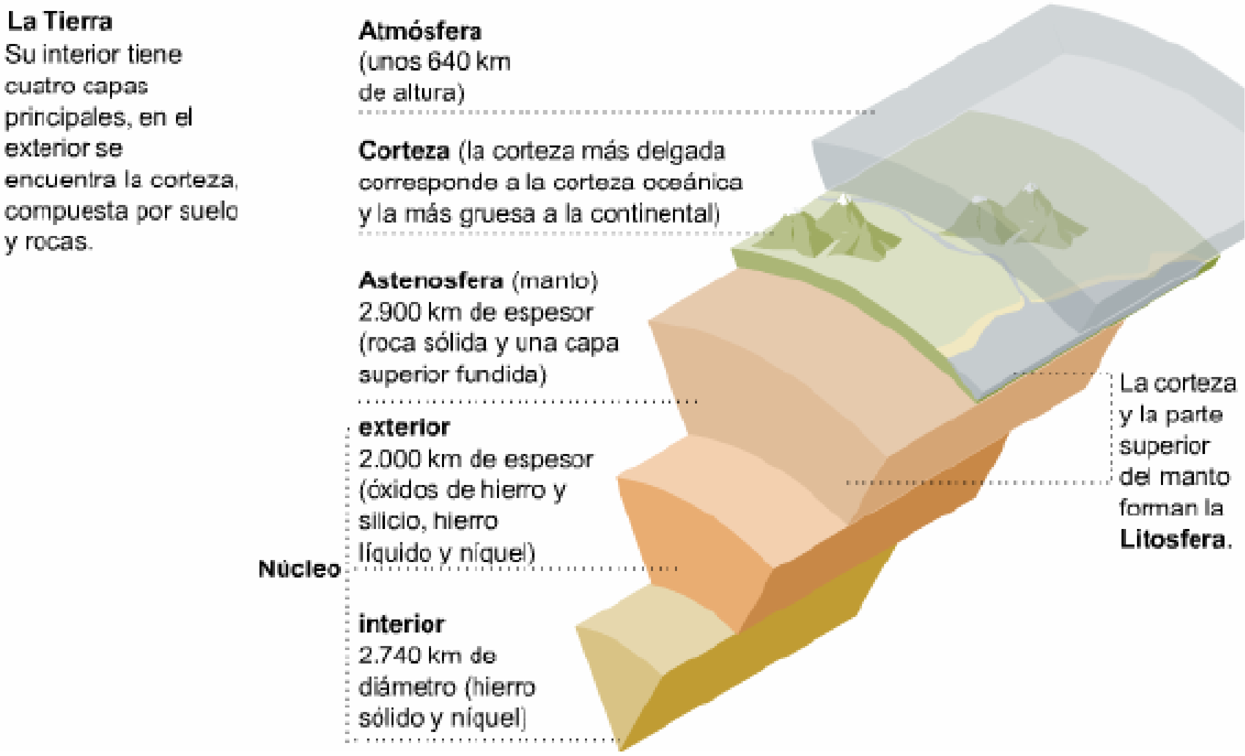
Capa interna	Espesor aproximado	Estado físico
Corteza	7-70 km	Sólido
Manto superior	650-670 km	Plástico
Manto inferior	2.230 km	Sólido
Núcleo externo	2.220 km	Líquido
Núcleo interno	1250 km	Sólido

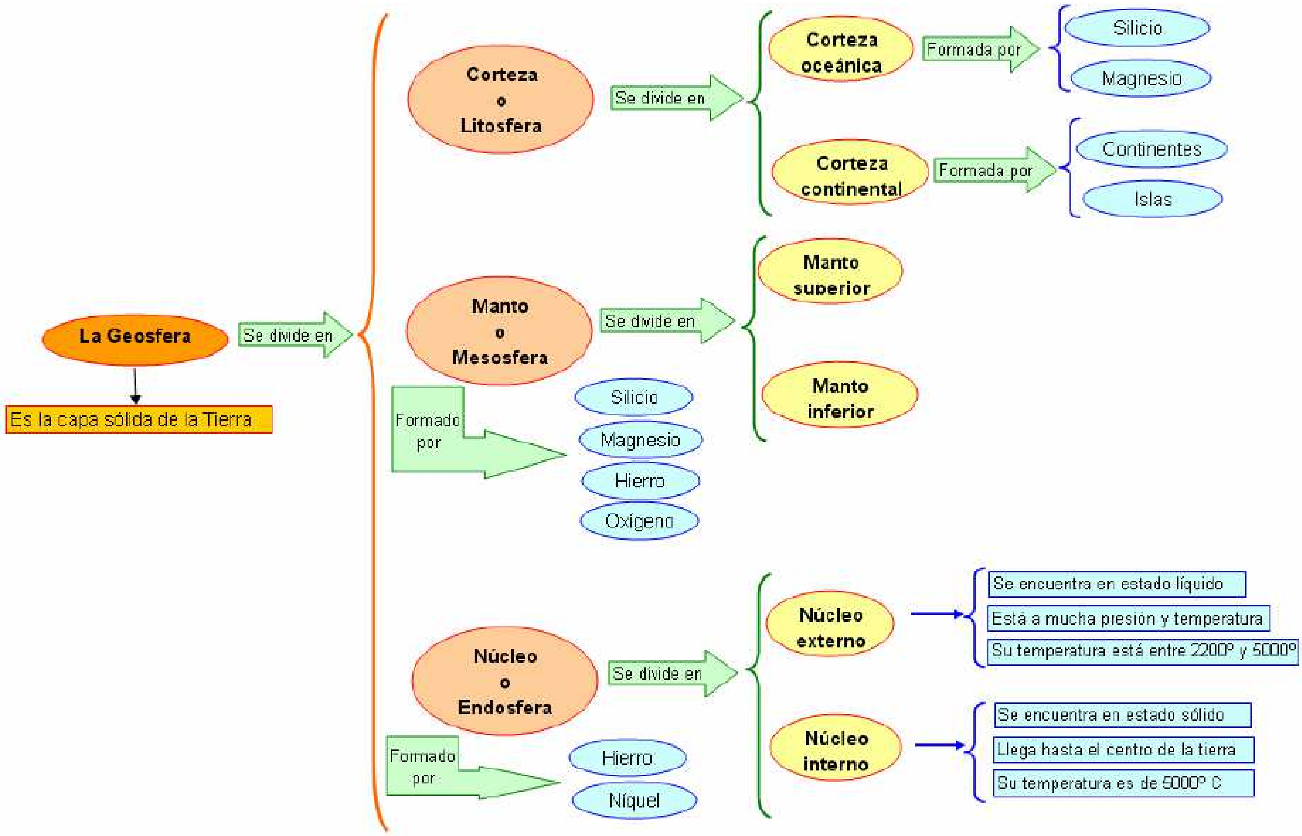


- **Corteza** o **litosfera**: es la capa más externa, en contacto con la atmósfera; está formada por silicatos ligeros, carbonatos y óxidos. Es más gruesa en la zona de los continentes y más delgada en los océanos. Es una zona geológicamente muy activa, ya que aquí se manifiestan los procesos internos debidos al calor terrestre, pero también se dan los procesos externos (erosión, transporte y sedimentación) debidos a la energía solar y la fuerza de la gravedad. Se diferencia una corteza continental y una corteza oceánica. Tiene un grosor medio de 30 km, aunque varía entre un mínimo de 5 km y un máximo de $70\ km$.

- **Manto** o **mesosfera**: abarca desde la corteza hasta una profundidad de $2.900\ km$. Está formado por silicatos menos densos en la parte externa (**manto superior**), y más densos en la zona interna (**manto inferior**). Aunque se encuentra en estado sólido, la zona comprendida entre los $200\ km$ y los $800\ km$ (llamada **astenosfera**) presenta cierta plasticidad y se considera el motor interno de la Tierra.
  El manto es una capa muy activa, ya que en ella se producen fenómenos de **convección de materiales**, debido a que los materiales calientes tienden a ascender, desde el núcleo a la superficie, pero al enfriarse, de nuevo tienden a hundirse hacia el interior. El movimiento de estos materiales produce el desplazamiento de los continentes y todo lo que esto lleva asociado: terremotos, vulcanismo, creación de islas y cordilleras, etc.

- **Núcleo** o **endosfera**: es la capa más interna de la Tierra y está formada por metales como el hierro y el níquel. El calor interno que almacena (debido a las altas presiones de los materiales, los procesos radiactivos y los restos de las colisiones que formaron el planeta) es responsable de las elevadas temperaturas de esta zona y del flujo de calor hacia la superficie terrestre, responsable de los **procesos geológicos internos**, que se manifiestan en fenómenos como el desplazamiento de los continentes, los terremotos o el vulcanismo. El **núcleo externo** (hasta los $5.100\ km$ de profundidad) se encuentra parcialmente fundido, es muy denso y está formado por hierro, níquel y azufre. El **núcleo interno** es una esfera metálica, formada de hierro y níquel, que ocupa el centro del planeta; es la capa más densa y, a pesar de que la temperatura supera los 6.000ºC, se encuentra en estado sólido por la enorme presión a la que está sometida.


La Tierra
Su interior tiene cuatro capas principales, en el exterior se encuentra la corteza, compuesta por suelo y rocas.
Atmósfera (unos 640 km de altura)
Corteza (la corteza más delgada corresponde a la corteza oceánica y la más gruesa a la continental)
Astenosfera (manto) 2.900 km de espesor (roca sólida y una capa superior fundida)
La corteza y la parte superior del manto forman la Litosfera.
Núcleo
exterior 2.000 km de espesor (óxidos de hierro y silicio, hierro líquido y níquel)
interior 2.740 km de diámetro (hierro sólido y níquel)


La Geosfera
Es la capa sólida de la Tierra
Se divide en
Corteza o Litosfera
Se divide en
Corteza oceánica
Formada por
Silicio
Magnesio
Corteza continental
Formada por
Continentes
Islas
Manto o Mesosfera
Se divide en
Manto superior
Manto inferior
Formado por
Silicio
Magnesio
Hierro
Oxígeno
Núcleo o Endosfera
Se divide en
Núcleo externo
Se encuentra en estado líquido
Está a mucha presión y temperatura
Su temperatura está entre 2200º y 5000º
Núcleo interno
Se encuentra en estado sólido
Llega hasta el centro de la tierra
Su temperatura es de 5000º C
Formado por
Hierro
Níquel

3.6. LOS PROCESOS GEOLÓGICOS

Las características físico-químicas de las diferentes capas de la Tierra hacen que haya un continuo trasiego de energía procedente del Sol (en la atmósfera e hidrosfera), y de calor del interior de la Tierra (en la litosfera), cuya consecuencia inmediata es un permanente cambio del relieve de la superficie terrestre mediante los llamados **procesos geológicos** que llevan a cabo los **agentes geológicos**, que son fenómenos naturales concretos.

- Los **procesos geológicos internos** son **creadores de relieve** (montañas, islas, etc.) y se deben al flujo de calor desde el interior de la Tierra, produciendo el movimiento horizontal de los fragmentos de la corteza terrestre (tectónica de placas) y, como consecuencia, **movimientos tectónicos**, que pliegan el terreno y forman montañas, pero también **movimientos orogénicos** (verticales, de hundimiento o elevación de terrenos), que dan lugar a la aparición de fallas o roturas en el terreno, procesos de metamorfismo y de magmatismo. Todo ello va asociado a la aparición de terremotos y vulcanismo.
- Los **procesos geológicos externos** son **destructores del relieve** y se deben a la entrada de energía procedente del Sol, que desencadena una serie de fenómenos naturales (los **agentes geológicos externos**, como el viento, la lluvia, la nieve, el hielo, las variaciones de temperatura, etc.) que actúan sobre la superficie terrestre, produciendo su **erosión** (disgregación y desgaste de materiales), **transporte** (de los materiales erosionados), **sedimentación** (deposición de los materiales cuando cesa la energía que los desplaza) y **diagénesi**s (compactación de materiales disgregados para formar nuevas rocas).

El modelado del relieve por los agentes geológicos produce formaciones características como cordilleras montañosas, pliegues del terreno, conos volcánicos, valles, dunas, lagos, grutas subterráneas, cárcavas, y otras muchas que dan lugar a paisajes característicos.

3.7. ROCAS Y MINERALES

La corteza terrestre contiene una serie de materiales sólidos que, de forma general, suelen clasificarse en rocas y minerales:

- Los **minerales** son sustancias (como el cuarzo, la fluorita o la pirita) que pueden aparecer de forma aislada y tienen una composición química y una estructura interna (ordenación de sus átomos) característica, clasificándose en elementos nativos (azufre y oro), sulfuros (pirita y galena), haluros (fluorita y sal común), óxidos (cuarzo y magnetita), carbonatos (calcita y siderita), sulfatos (yeso y baritina), fosfatos (apatito) y silicatos (piroxenos y anfíboles). Según su origen, pueden ser magmáticos (cuarzo y silicatos), filonianos (pirita y galena), sedimentarios (yeso y sal gema) o metamórficos (talco y micas).

- Las **rocas** son materiales (como el granito, el mármol o la pizarra) que pueden contener varios minerales y se forman como consecuencia de un determinado proceso geológico (vulcanismo, sedimentación en ríos o mares, transformación de otras rocas, etc). Según su origen se clasifican en **ígneas** (procedentes de magmas fundidos, como el granito o la piedra pómez), **sedimentarias** (resultado de la acumulación de materiales erosionados, como la arenisca, las calizas o la arcilla) o **metamórficas** (por alteración de otras rocas al ser sometidas a altas presiones y temperaturas cuando quedan en el interior de la corteza terrestre, como el gneis, el mármol o las pizarras).

4. ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LA VIDA

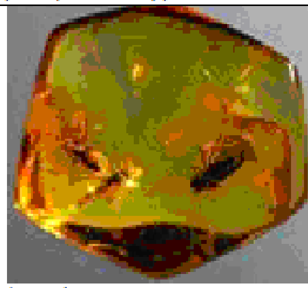
Es muy difícil determinar cómo surgió la vida en nuestro planeta, pero la teoría más aceptada propone que, como la atmósfera primigenia era rica en agua, hidrógeno y metano, la intensa radiación solar a la que estaba sometida causaría potentes descargas eléctricas, haciendo posible la síntesis natural de **aminoácidos**, que son las moléculas que forman las proteínas; disueltos en un medio acuoso, el azar pudo reunir los ingredientes necesarios para formar con ellos el primer organismo capaz de hacer copias de sí mismo, de tipo vírico o bacteriano, a partir del que lenta, pero gradualmente habría surgido toda la gran variedad de seres vivos que pueblan en la actualidad nuestro planeta.
Otras teorías proponen que las primeras moléculas de la vida pudieron llegar al planeta en cometas, o se formaron en fuentes hidrotermales submarinas, pero lo cierto es que se desconoce el origen exacto de la vida.
En cualquiera de los casos, el estudio de los restos fósiles demuestra que desde hace más de 2.000 millones de años han existido seres vivos en nuestro planeta y que han ido cambiando sus características en un proceso lento, pero continuo que se ha venido produciendo a lo largo de todo este tiempo, de modo que han ido surgiendo todos los seres vivos que conocemos, a la vez que otras muchas especies desaparecían a medida que las condiciones de nuestro planeta cambiaban.

La **evolución biológica** es un proceso gradual por el que el conjunto de todos los seres vivos experimenta cambios que les permite adaptarse mejor al medio en el que viven.

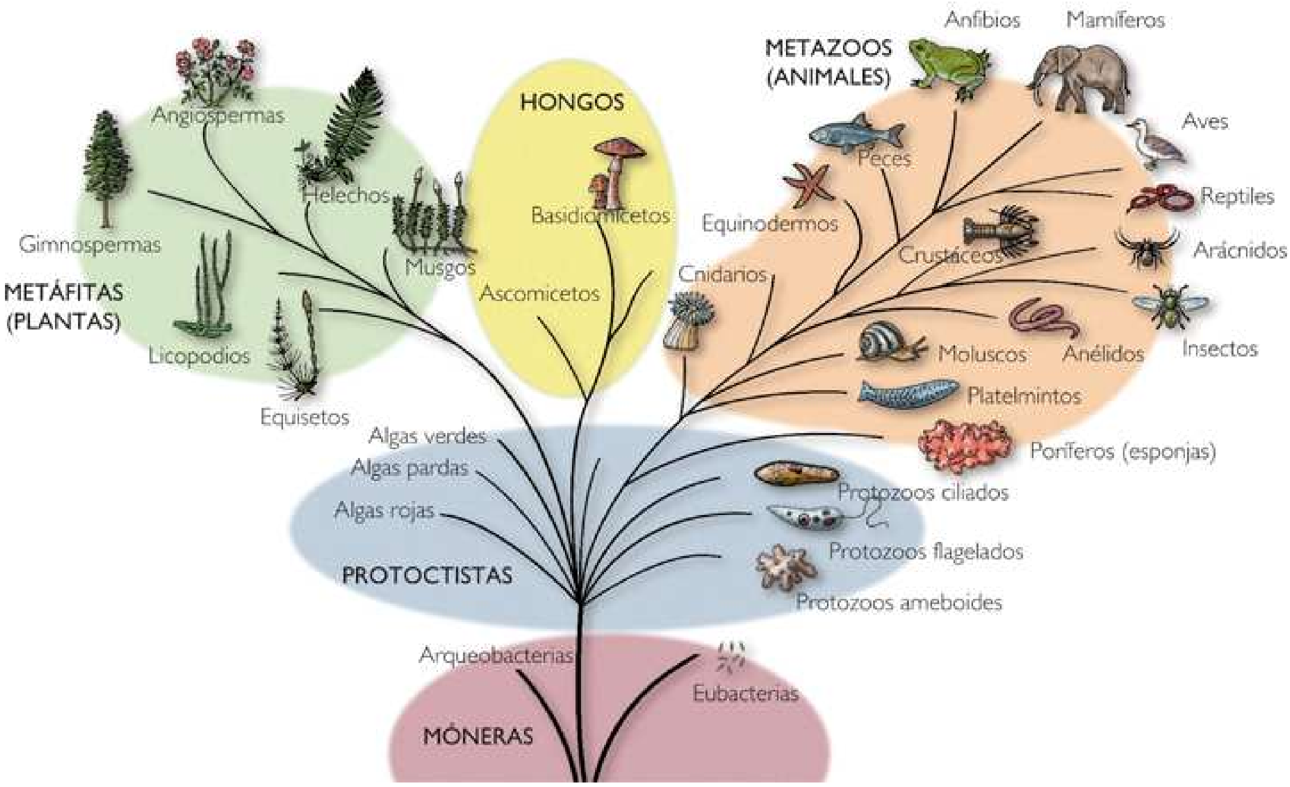
Las primeras teorías evolutivas de **Lamarck** y **Cuvier** explicaban los cambios de los seres vivos con ideas consideradas actualmente erróneas:
- Los caracteres adquiridos a lo largo de la vida se transmiten a la descendencia.
- La necesidad ante cierta situación hace que surjan determinados rasgos transmisibles.

En 1831, un joven naturalista inglés llamado **Charles Darwin** se embarcó en un buque de investigación científica llamado Beagle. Tras cinco años de navegación por los océanos Atlántico, Pacífico e Índico, llegó a la conclusión de que las adaptaciones de especies a diferentes entornos sólo podían ser explicadas mediante un proceso evolutivo. En 1859 Darwin publicó un libro titulado “El origen de las especies”, en el que expuso sus ideas sobre la evolución de los seres vivos. El libro causó una gran polémica en el mundo científico de la época, hecho que no impidió que la teoría evolutiva en él expuesta, basada en la **selección natural**, se haya ido confirmando. En la actualidad el **neodarwinismo** se ve reforzado con el conocimiento de la base cromosómica de la herencia, además de la existencia de estructuras biológicas análogas entre especies, tanto actuales, como fósiles.
La teoría de la evolución por selección natural propone que en cada momento todas las especies de seres vivos tienen una descendencia con rasgos similares, pero nunca idénticos, debido a la **variabilidad genética**, motivada, entre otras razones, por:
- La mezcla y transmisión de material genético (ADN) de orígenes diferentes que ocurre cuando se forman los gametos en la reproducción sexual.
- Las mutaciones genéticas, que son modificaciones del ADN causadas por la exposición a radiaciones, a determinadas sustancias o por los mecanismos de división de las células. En la mayoría de los casos producen cambios muy perjudiciales para el individuo, pero en otros pueden aportarle ventajas.

Como en cada generación la descendencia es abundante y los recursos limitados, todos los individuos compiten entre sí, por lo que acaban prevaleciendo los mejor adaptados al medio, ya que tienen mayor capacidad reproductiva. El resultado es que transmiten sus rasgos a las siguientes generaciones y la especie va cambiando a lo largo del tiempo.

<table>
<tr><th>El reloj del tiempo</th><th>El medio ambiente</th><th>Los seres vivos</th></tr>
<tr><td>$2000\ m.a.$</td><td>La atmósfera tiene poco oxígeno.
La temperatura es muy elevada.
Los rayos UV impiden la vida fuera del mar.</td><td>
Sólo hay vida en el mar de organismos unicelulares</td></tr>
<tr><td>$600\ m.a.$</td><td rowspan="2">En los continentes no hay seres vivos, ni plantas ni animales.</td><td>
Seres marinos: esponjas, anélidos, artrópodos y algas pluricelulares</td></tr>
<tr><td>$450\ m.a.$</td><td>
Sólo vida marina:peces, artrópodos, moluscos y plantas.</td></tr>
<tr><td>$300\ m.a.$</td><td>En los continentes el clima es muy húmedo</td><td> 
Plantas e insectos terrestres. Anfibios (ranas), reptiles y hongos.</td></tr>
<tr><td>$100\ m.a.$</td><td>Sólo hay un continente.
El clima es muy seco y cálido.</td><td> 
En el gran continente hay coníferas y grandes reptiles. En los mares abundan los ammonites.</td></tr>
<tr><td>$5\ m.a.$</td><td>Un gran manto de hielo cubre el hemisferio Norte.
El clima es frío y seco.</td><td> 
Predominan las aves y los mamíferos. Desarrollo de las plantas con flor y de las gramíneas</td></tr>
<tr><td>$0\ m.a.$</td><td>Se reduce el nivel de hielo en los polos y el clima es más húmedo.</td><td> 
Primeros homínidos. Desarrollo de las plantas gramíneas (trigo, avena, ...)</td></tr>
</table>

La siguiente imagen muestra cómo se cree que han surgido durante este tiempo toda la variedad de especies de seres vivos de nuestro planeta:

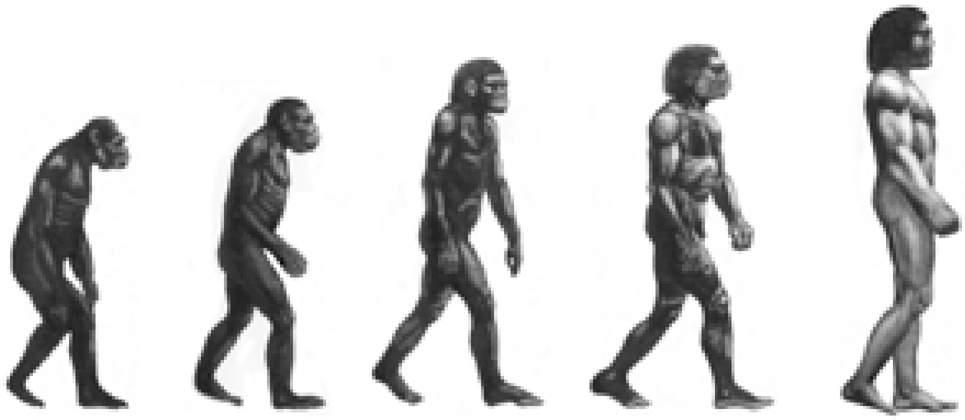


La **evolución humana**, conocida también como **hominización**, es el proceso de transformación de la especie humana desde sus ancestros hasta el estado actual. Algunos de los representantes conocidos a partir de los restos fósiles son:

- **Australopithecus:** surgió en África hace cinco millones de años. Era un primate, como un gorila o un chimpancé, que andaba sobre dos piernas.
- **Homo Habilis:** vivió hace dos millones de años también en África. Usaba herramientas de piedra y es considerado el primer ser humano.
- **Homo Erectus:** vivió hace un millón y medio de años y fue la primera especie humana que se expandió por grandes regiones de Europa y Asia. Tenía mayor desarrollo tecnológico y logró el control del fuego.
- **Homo Neanderthalensis:** surgió hace 230.000 años y se han hallado restos suyos en Europa y Asia. Era muy parecido al ser humano actual y fue el primero que enterró a sus muertos.
- **Homo Sapiens:** surgió en África hace 150.000 años y, por tanto, coexistió con Neanderthalensis. Fue el primer homínido que realizó manifestaciones artísticas y que alcanzó Oceanía y América.

Características del proceso de hominización:

- El bipedismo permitió tener las manos libres mientras caminaba y transportar a sus crías o llevar objetos.
- El dominio del fuego facilitó la fabricación de herramientas y mejoró la alimentación, favoreciendo el aumento del cerebro.
- El desarrollo de un dedo pulgar oponible al resto de los dedos permitió realizar trabajos minuciosos con las manos.
- La .prolongación de la infancia y el desarrollo de un lenguaje complejo, diferente al de los demás animales, propiciaron el aprendizaje y la transmisión de los conocimientos adquiridos.



En todo el recorrido de la evolución de los seres vivos, la especie humana tiene también su lugar, ocupando tan sólo el espacio que corresponde al último millón de años. Esperemos que, con nuestra tecnología y nuestras acciones agresivas hacia el medioambiente, no seamos capaces de detener este “reloj del tiempo” que bien pudo empezar con unas primeras bacterias que vivieron en los océanos primigenios.